Civilittee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civilittee-HU.com

دفتـر

تحليل عددي

د. ضرار المومني
إعداد : روابي أبو غزالة

www.civilittee-hu.com Civilittee Hashemite Civilittee HU | لجنة المدني

* Error :-

→ error غلط الرقم

ex :-

$\pi = 3.1418562$

use 3 digas → 3.142 = تقريب

* Rounding → 3.142 = تقريب

* chopping → 3.141 = قطع الرقم

* Note

* 140. → 0 digite

* 140.00 → 2 digite.

ex :-

2.718281 use three digite.

2.718 → Rounding

2.718 → chopping

ex :-

$\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$

* Abslaut error = |true − exp.|

* Relative error = $\frac{|true - exp|}{true} \times 100\%$

Subject Date No.

* theoritical error غ حالة عدم وجود

1. true error → المقارنة تبكن فيها

- → absolute true error = $E_T = |true - exp|$
- → relative true error = $\epsilon_T = \frac{|true - exp|}{true} \times 100\%$

2. approximation error → عند قيمة ارجع اقارن فيها

* No. of itteration

→ absolute app. error

E_a = there is no true value

→ relative app. error

ϵ_a

(It)	length (cm)	E_a	ϵ_a
1	203	—	—
2	198	5	2.5%
3	201	3	1.5%
4	199	2	1%

$|new - old|$

$= |198 - 203| = 5$

$\frac{|new - old|}{new} \times 100$

* نسبة الخطأ عندما تقل يعني كل مرة بكون
* ممكن أيضاً تساوي نسبة error إضافية أيضاً

تكملة للجدول

5	200	1	$\frac{1}{200} \times 100\% = 0.5\%$
6	200	0	0

بوقف ما بكمل

Subject Date No.

Ex :—

tow methods to estimate the root for $f(x) = x^2 - x - 6$
and resulting the following.

method (A)

iteration ✓ roots

i	x_i
1	2.5
2	2.75
3	2.88
4	2.895

method (B)

i	x_i
1	2.5
2	2.89
3	2.99
4	3.01

for each method calculate E_T, ϵ_T, E_a, ϵ_a
after 4 itteration

Sol

Method A

$E_T = |3 - 2.895| = 0.15$

true value

$x^2 - x - 6$

$(x-3)(x+2) = 0$

$\boxed{x=3}$ ✓ $\boxed{x=-2}$ ✗

true root

$\epsilon_T = \frac{0.15}{3} \times 100\% = 5\%$

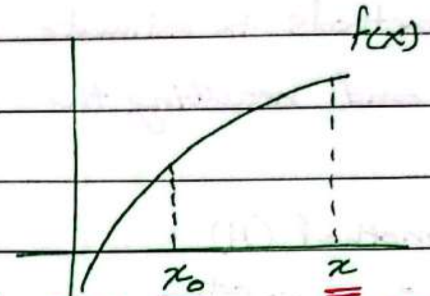
Method A

$E_a = 2.895 - 2.88 = 0.015$

$\epsilon_a = \frac{0.015}{2.895} \times 100\% = 0.5\%$

Subject Lec-2- Date 6/3/2022 No. الأحد

⊛ Tylor series T.S :-



x_0 ← عبارة عن نقطة معينة بمشي من عندها حتى اوصل للقيمة المطلوبة

x ← حتى اوجد قيمة x تعتمد على عدد المشتقة

$x^3 \longrightarrow 3^{rd}$ order (عدد المشتقة)

$\sin(x) \longrightarrow \infty$

← هو العدد المشتقة المطلوب نوصل اله .

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^i \cdot f^i(x_0)}{i!}$$

$i=0$ ← order

f^i ← عبارة عن مشتقة المعادلة حسب عدد المشتقة المطلوب

⊛ بالأول لا بدي أول بشتق المعادلة حسب عدد order معبعا بعوض بقانون Tylor

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)^i \cdot f^i(x_0)}{i!}$$

n ← عدد المشتقة المطلوب بالسؤال

n- the order tylor series

$$\boxed{0! = 1}$$ ⟸ ملاحظة مهمة ⊛

Subject Date No.

ex:—

Find 3^{rd} order T.S For $f(x) = e^{x}$ when $\boxed{x_0 = 0}$

① بنشتق المعادلة حسب العدد المطلوب بالسؤال $\underline{3^{rd}}$

لا تعتبر مشتقة أولى ← $f(x) = e^{x}$
تعتبر المشتقة $\underline{0}$

$f'(x) = e^{x}$

$f''(x) = e^{x}$

$f'''(x) = e^{x}$

② بعوض قيمة x_0 بكل مشتقة

$f(0) = e^{0} = 1$

$f'(0) = e^{0} = 1$

$f''(0) = e^{0} = 1$

$f'''(0) = e^{0} = 1$

③ بعوض بقانون Tylor

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)^{i} \cdot f^{i}(x_0)}{i!}$$

$$= f_3(x) = \frac{(x-0)^{0} \cdot \overset{f(x_0)}{1}}{0!} + \frac{(x-0)^{1} \cdot \overset{f'(x_0)}{1}}{1!} + \frac{(x-0)^{2} \cdot \overset{f''(x_0)}{1}}{2!} + \frac{(x-0)^{3} \cdot \overset{f'''(x_0)}{1}}{3!}$$

قيمة عشوائية ممكن افتراضها او معطى بالسؤال

$=$

Subject Date No.

ex :- Find 3^{rd} order T.S For $f(x) = \sin(2)$ using $\boxed{x_0 = 0}$

$\boxed{X=2}$ ملاحظة هون لعطاني قيمة x معوضة بالقانون ⊛

$f(x) = \sin(x) \longrightarrow f(0) = \sin(0) = 0$

$f'(x) = \cos(x) \longrightarrow f'(0) = \cos(0) = 1$

$f''(x) = -\sin(x) \longrightarrow f''(0) = -\sin(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos(x) \longrightarrow f'''(0) = -\cos(0) = -1$

$$f_3(x_0) = \frac{(x-0)^0 \cdot 0}{0!} + \frac{(x-0)^1 \cdot 1}{1!} + \frac{(x-0)^2 \cdot 0}{2!} + \frac{(x-0)^3 \cdot (-1)}{3!}$$

$$f_3(x_0)\Big|_{\boxed{X=2}} = \frac{(2-0)^0 \cdot 0}{0!} + \frac{(2-0)^1 \cdot 1}{1!} + \frac{(2-0)^2 \cdot 0}{2!} + \frac{(2-0)^3 \cdot -1}{3!}$$

$$= 0 + 2 + \frac{4 \times 0}{4} + \frac{-8}{6} = 0.667$$

⊛ ملاحظة :-

تعويض الزاوية بالآلة لازم تكون rad وليس بالـ ~~deg~~ deg

⊛ يجب قيمة sin(2) من الالة الكاسبة

$\sin(2)_{exact} = 0.909$

$\sin(2)_{T.S} = 0.667 \leftarrow$ حتى اوصل لقيمة exact

نزيد عدد المشتقة لان

مشتقة sin ∞

Subject　　　　　　　　　　　　Date　　　　　　No.

* Reminder = R = exact − T.S

in last example Reminder

$$R_3 = \underset{\text{exact}}{\sin(2)} - \underset{\text{T.S}}{\sin(2)} = 0.909 - 0.667$$
$$= 0.242$$

ex　Find R_4 order T.S For $f(x) = \cos x$ at $\boxed{x=2}$ $\boxed{x_0=0}$

$$f(x) = \cos x \longrightarrow f(0) = \cos(0) = 1$$
$$f'(x) = -\sin(x) \longrightarrow f'(0) = -\sin(0) = 0$$
$$f''(x) = -\cos(x) \longrightarrow f''(0) = -\cos(0) = -1$$
$$f'''(x) = +\sin(x) \longrightarrow f'''(0) = \sin(0) = 0$$
$$f^4(x) = \cos(x) \longrightarrow f^4(0) = \cos(0) = 1$$

* معادلة $f(x)$ بعوض قيمة x_0

* اما معادلة T.S بعوض قيمة x , x_0

$$f_4(x) = \frac{(x-0)^0 \cdot 1}{0!} + \frac{(x-0)^1 \cdot 0}{1!} + \frac{(x-0)^2 \cdot (-1)}{2!} + \frac{(x-0)^3 \cdot 0}{3!} + \frac{(x-0)^4 \cdot (1)}{4!}$$
$$= \frac{(2-0)^0 \cdot 1}{0!} + \frac{(2-0)^1 \cdot 0}{1!} + \frac{(2-0)^2 \cdot (-1)}{2!} + \frac{(2-0)^3 \cdot 0}{3!} + \frac{(2-0)^4 \cdot (1)}{4!}$$
$$= 1 + 0 + \left(\frac{4 \times -1}{2}\right) + 0 + \frac{16}{24} = -0.333$$

Subject Date No.

$$f_{exact}(2) = \cos(2) = -0.416$$

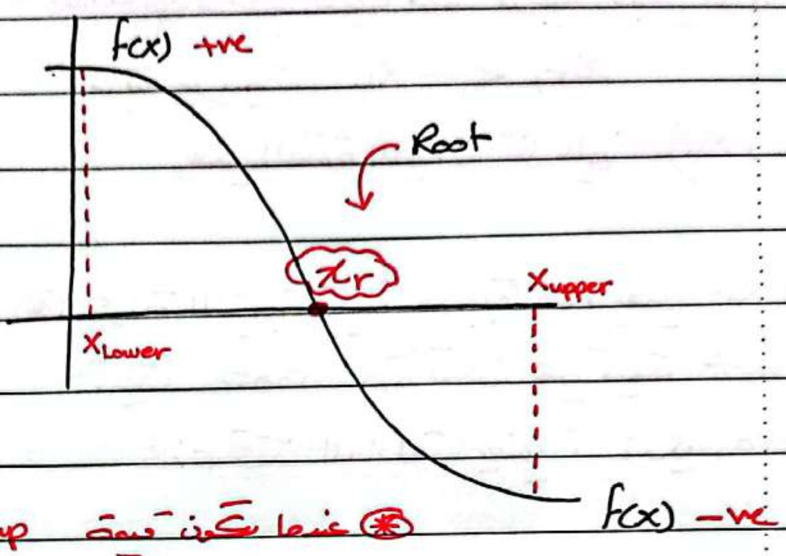
$$F_{T.S}(2) = -0.333$$

$$\ell_4 = F_{exact}(2) - F_{T.S}(2) = -0.416 - -0.333 = -0.083$$

Subject Lec -3- Date 8/3/2022 No. الثلاثاء

⊛ Root of equation

(X_u , X_L)



$X_{Lower} \longrightarrow X_{upper}$

(اكيد بكون قطع محور السينات
عند نقطة معينة)

⊛ عندما تكون قيمة up / low موجبات يعني ما راح يكون
عندي قيمة root (يعني ما صار في قطع لمحور السينات)

⊛ Breaking method

1 ▣ Bisection method (Interval Halving)

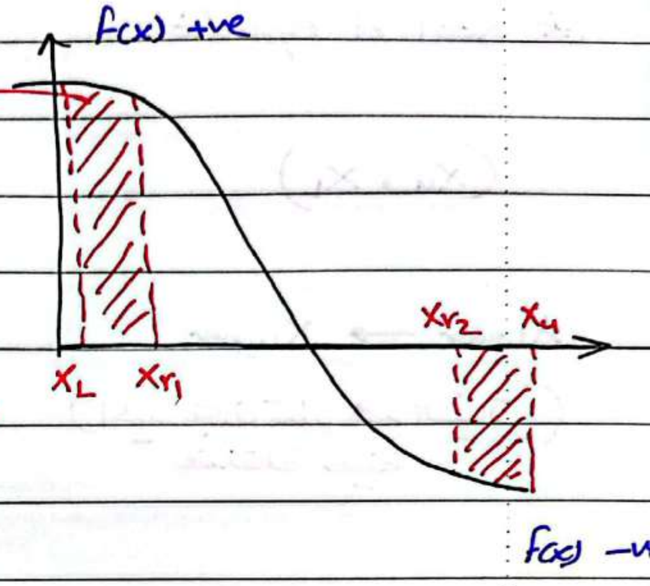
(X_L , X_u)

$f(x_L) * f(x_u) < \text{zero}$ ← لا أعوض قيمة lower & upper
بالمحاولة لازم حاصل ضربهم
يكون أقل من الصفر لانه بكون عندي قيمة
سالبة وقيمة موجبة

المحاولة الأولى ⟶ $\dfrac{X_u + X_L}{2} = x_{r_1}$ (+ve)

↳ ليست القيمة الفعلية نفسها
هيك بضل احاول لاوصل القيمة الفعلية

Subject Date No.



المحاولة الاولى كانت القيمة فرضاً موجبة فبلغي هاي الفترة
بتصير قيمة $x_L \longrightarrow x_{r_1}$
يعني الفترة اللي حشتغل عليها (x_{r_1}, x_u)

⊛ كون النتيجة أيضاً موجبة هاد يعني x_r ليست قيمة root حتى تكون هي قيمة root لازم تحقق المعادلة يعني تساوي zero

المحاولة الثانية $\longrightarrow \dfrac{x_{r_1} + x_{r_u}}{2} = x_{r_2}$ (-ve)

المحاولة الثالثة $\longrightarrow \dfrac{x_{r_1} + x_{r_2}}{2} = x_{r_3}$

⊛ لا يكون عدد itteration كبير بكون معطيني بالسؤال error بوقف عندها ، القيمة root بتكون عند هاي error

x_{r_1}

x_{r_2} 20%

x_{r_3} 10%

Scanned with CamScanner

Subject Date No.

ex :- Find the root of $f(x) = \cos(2x) - x$

within $[0.5, 0.75]$ using bisection method ?

$\epsilon_s \leq 1\%$

له ضحل المثال بطريقة الجدول

n	x_L	x_u	x_r	$f(x_L)$	$f(x_u)$	error
1	0.5	0.75	0.625	+0.04	−0.679	[illegible]
2	0.5	0.625	0.5625	+0.04	−0.31	11%
3	0.5	0.5625	0.531	+0.04	−0.131	5.9%
4	0.5	0.531	0.5155	+0.04	−0.044	3%
5	0.5	0.5155	0.5077	+0.04	−0.0015	1.5%
6	0.5077	0.5155	0.5116	+0.019	−0.0015	0.76%

$x_{r_1} = \frac{0.75 + 0.5}{2} = 0.625 \rightarrow f(x_{r_1}) = -0.31$ ← الصورة بعد يعني صحيح قيمة x_{r_1} بدل قيمة x_u في الخانة الثانية

$x_{r_2} = \frac{0.5 + 0.625}{2} = 0.5625 \rightarrow f(x_{r_2}) = -0.131$

$x_{r_3} = \frac{0.5 + 0.5625}{2} = 0.531 \rightarrow f(x_{r_3}) = -0.044$

$x_{r_4} = \frac{0.5 + 0.531}{2} = 0.5155 \rightarrow f(x_{r_4}) = -1.5 \times 10^{-3}$

$x_{r_5} = \frac{0.5 + 0.5155}{2} = 0.5077 \rightarrow f(x_{r_5}) = +0.019$

$x_{r_6} = \frac{0.5077 + 0.5155}{2} = 0.5116 \rightarrow f(x_{r_6}) =$

Subject Date No.

$$error_1 = \frac{|0.5625 - 0.625|}{0.5625} \times 100\% = 11\%$$

* مجموعة ملاحظات :—

* عند إيجاد x_r بوجد حسبتها عن طريق التعويض بالمعادلة إذا كانت الناتج

+ve ← بحط قيمة x_r بدل قيمة x_L

-ve ← بحط قيمة x_r بدل قيمة x_u

* اكل هو بد approximat لانه أنا محصور بفترة معينة.

* E_s = accepted error

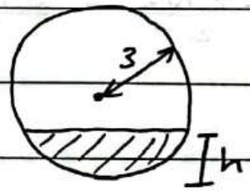
← نسبة error المسموح بها في السؤال

بضل أحل حتى أوصل للقيمة

ex the volume of water in spherical tank is given by

$$V = 2\pi h^2 \left(\frac{9-h}{3}\right)$$

if volume $V = 30\,m^3$, $R = 3m$ use bisection method to estimate h, solve 4 itteration and calculate E_a, ϵ_a for each iteration.



$$30 = 2\pi h^2 \left(\frac{9-h}{3}\right)$$ ← يعوض الحجم بالمعادلة

$$0 = 2\pi h^2 \left(\frac{9-h}{3}\right) - 30$$ (المعادلة اللي حنشتغلها بالبحتريفن)

$h_L = 0$ (لما يكون التنك فاضي) $(0, 6)$

$h_u = 6$ (لما يكون التنك فل بالماء)

n	h_L	h_u	h_r	$f(h_L)$	$f(h_u)$	E_a	ϵ_a
1	0	6	$^{(+)}$3	−30	+196.19	—	—
2	0	3	$^{(+)}$1.5	−30	+83.1	1.5	100%
3	0	1.5	$^{(-)}$0.75	−30	+5.34	0.75	100%
4	0.75	1.5	1.125	−20.28	+5.34	0.375	33.3%

عادي لوكانت النسبة 100%
ولوكانت ثابتة المهم انه ما يصير
زيادة على نسبة error

$$hr_1 = \frac{h_L + h_u}{2} = \frac{0+6}{2} = 3 \longrightarrow f(3) = +83.1$$

← كونه الصورة موجبة إذا حلغي الفترة الموجبة
والقيمة hr_1 حتحل محل قيمة h_u

$$hr_2 = \frac{h_L + hr_1}{2} = \frac{0+3}{2} = 1.5 \longrightarrow f(1.5) = +5.34$$

$$hr_3 = \frac{h_L + hr_2}{2} = \frac{0+1.5}{2} = 0.75 \longrightarrow f(0.75) = -20.28$$

← كونه الصورة سالبة إذا حتلغي الفترة السالبة
والقيمة hr_3 حتحل محل قيمة h_L

$$E_{a_1} = |new - old| = |1.5 - 3| = 1.5$$

$$\epsilon_{a_1} = \frac{|new - old|}{new} = \frac{|1.5 - 3|}{3} \times 100 = 100\,\%$$

⊛ خ قانون بيدلي كم iteration لازم أعمل حتى اوصل لنسبة الخطأ المطلوبة
فقط خ (bisection method)

# of iteration needed

$$n = \frac{Ln(\Delta x_0 / \epsilon_s)}{Ln\, 2}$$

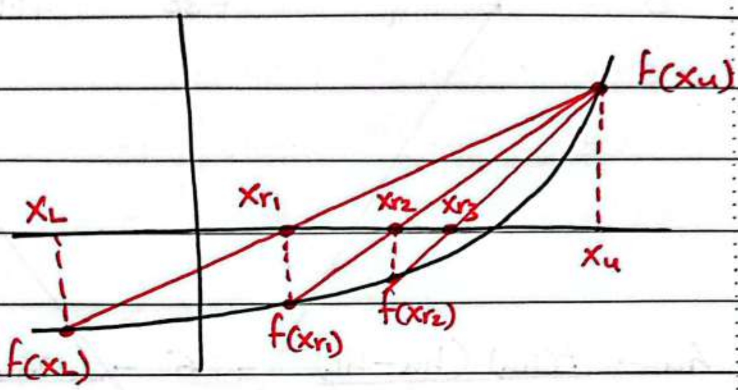
بعوض النسبة عشري 0.01

$$\Delta x_0 = x_u - x_L$$

in example $\longrightarrow$ $n = \frac{Ln((6-0)/0.01)}{Ln\, 2} = 9.2 \approx 10$ ← يقربها حتى أوصل للقيمة المطلوبة.

Subject　　　　Date　　　　No.

2 false position method



❋ أول اشي لازم أتأكد من القيمتين x_L و x_u لازم يكونو وحدة موجبة ، وحدة سالبة

❋ بوصل بين الصدرتين ، وبعطيني اول قيمة لل x_{r1}

❋ هق احسب قيمة x_{r1} ←

$$x_{r1} = x_u - \frac{f(x_u)(x_u - x_L)}{f(x_u) - f(x_L)}$$

❋ ex :- (نفس المثال السابق)

volum of water in a spherical tank is given by

$$v = 2\pi h^2 - \left(\frac{9-h}{3}\right)$$

if volume = $30m^3$, R = 3m use false position method

use 4 iteration to and cal. E_a, ε_a

$$0 = 2\pi h^2 \left(\frac{9-h}{3}\right) - 30$$

$h_L = 0$　　$(0, 6)$

$h_u = 6$

Subject Date No.

n	h_L	h_u	h_r	$f(h_L)$	$f(h_u)$	E_a	E_a
1	0	6	0.796	−30	+196.19	0.462	36.7 %
2	0.796	6	1.258	−19.11	+196.19	0.462	36.7 %
3	1.258	6	1.36	−4.34	+196.19	0.102	7.5 %
4	1.36	6	1.37	−0.404	+196.19	0.01	0.73%

$$h_{r1} = x_u - \left(\frac{f(x_u) - (x_u - x_L)}{f(x_u) - f(x_L)}\right) = 6 - \frac{196.19 * (6-0)}{196.19 - (-30)} = 0.796$$

$f(h_{r1}) = -19.11 \leftarrow h_L \leftarrow h_n$ الصورة سالبة بحط القيمة

$$h_{r2} = 6 - \frac{196.19 * (6 - 0.796)}{196.19 - (-19.11)} = 1.258 \rightarrow f(h_{r2}) = -4.34$$

$$h_{r3} = 6 - \frac{196.19 (6 - 1.258)}{196.19 - (-4.34)} = 1.36 \rightarrow f(h_{r3}) = -0.404$$

$$h_{r4} = 6 - \frac{196.19 (6 - 1.36)}{196.19 - (-0.404)} = 1.37 \rightarrow$$

- divarge → ما بوصل للحل بسرعة
- convarge → بوصل للحل بسرعة

- في الكتاب الثابتة ← more converge

- false position more converge than bisection.

Scanned with CamScanner

⊠ open method

⊛ تتميز هاي الطريقة عن الطرق القبل هيه
ما في فترة بس بكون معطيني قيمة ابتدائية .

⊛ require one initial guess (x_0)

① Simple Fixed point iteration ← تنقسم لأكثر من طريقة ⊛
② Newton Raphson method N.R
③ modife Newton Raphson M.N.R
④ Secont method

related لبعض

A Simple Fixed point iteration

- given $f(x) = 0$ at initial guess (x_0)
- rearrange $f(x) = 0 \iff x = g(x)$
- then the iteration Formula $x_{i+1} = g(x_i)$

ex :- ← rearrange امثلة ع ⊛

$$f(x) = \sin\sqrt{x} - x$$

rearrange $\longrightarrow$ $\sin\sqrt{x} - x = 0$

$$x = \underbrace{\sin\sqrt{x}}_{g(x)}$$

ex :- $f(x) = x^2 - 5x + 2$

$x^2 - 5x + 2 = 0$ * عندك أكثر من Formula

a) $5x = 2 + x^2 \rightarrow x = \underbrace{\frac{2 + x^2}{5}}_{g(x)}$

b) $x^2 = 5x - 2 \rightarrow x = \underbrace{\sqrt{5x - 2}}_{g(x)}$

c) $x(x - 5) + 2 = 0 \rightarrow x = \underbrace{\frac{-2}{x - 5}}_{g(x)}$

ex :- $f(x) = \sin\sqrt{x}$ بالإضافة والطرح (x)

$\sin\sqrt{x} = 0$

$\sin\sqrt{x} + x - x = 0$

$x = \underbrace{x - \sin\sqrt{x}}_{g(x)}$

$x_{i+1} = g(x_i)$ مهمة *

new iteration (x_{i+1})   old iteration (x_i)

ex :- Estimat the Root For $f(x) = x - \sin\sqrt{x}$ using Simple Fixed point iteration with $\boxed{x_0 = 1}$ $\epsilon_s \leq 1\%$

$x - \sin\sqrt{x} = 0 \longrightarrow x = \underbrace{\sin\sqrt{x}}_{g(x)}$

$x_1 = g(x_0) = \sin\sqrt{x_0} = \sin\sqrt{1} = 0.84$

$\epsilon_{a1} = \frac{0.84 - 1}{0.84} \times 100\% = 19\%$

* بقدر أرصد error لأنه عندي قيمة سابقة

$x_2 = g(x_1) = \sin\sqrt{0.84} = 0.79$

$\epsilon_{a2} = \frac{0.79 - 0.84}{0.79} \times 100\% = 6.33\%$

$x_3 = g(x_2) = \sin\sqrt{0.79} = 0.776$

$\epsilon_{a3} = \frac{0.776 - 0.79}{0.776} \times 100\% = 1.8\%$

$x_4 = g(x_3) = \sin\sqrt{0.776} = 0.771$

$\epsilon_{a4} = \frac{0.771 - 0.776}{0.771} \times 100\% = 0.65\% < 1\%$ (ok)

*** ex :-** Using Simple fixed method estimat the root for $f(x) = 5x^2 + x - 2$ use $x_0 = 1$

Solve for 3 iteration.

a) $5x^2 + x - 2 = 0$

$x = \underbrace{2 - 5x^2}_{g(x)}$

$$x_1 = g(x_0) = 2 - 5(1)^2 = -3$$

$$\epsilon_{a1} = \frac{|-3-1|}{-3} \times 100\% = 133.33\%$$

$$x_2 = g(x_1) = 2 - 5(-3)^2 = -43$$

$$\epsilon_{a2} = \frac{|-43-(-3)|}{-43} \times 100\% = 93\%$$

$$x_3 = g(x_2) = 2 - 5(-43)^2 = -9243$$

$$\epsilon_{a3} = \frac{|-9243-(-43)|}{9243} \times 100\% = \underline{\underline{99.5\%}}$$

قيمة error زادت
يعني divange
فبعمل Formula تاني.

$\boxed{b}$ $x = \sqrt{\frac{2-x}{5}}$

$x_1 = g(x_0) = \sqrt{\frac{2-(1)}{5}} = 0.447 \rightarrow \epsilon_{a1} = 123.7\%$

$x_2 = g(x_1) = \sqrt{\frac{2-0.447}{5}} = 0.557 \rightarrow \epsilon_{a2} = 19.75\%$

$x_3 = g(x_2) = \sqrt{\frac{2-0.557}{5}} = 0.537 \rightarrow \epsilon_{a3} = 3.7\%$

(convange)

Subject Date No.

صعب انه لا يكون عندي أكثر من Formula أجربهم كلهم حتى أعرف
أي منهم اكثر الصح لذلك في ٣ قوانين مهمين حتى أعرف
أي Formula استخدم

$\boxed{1}$ $\left|\frac{dg}{dx}\right| > 1 \longrightarrow$ divarge

$\boxed{2}$ $\left|\frac{dg}{dx}\right| < 1 \longrightarrow$ converge

$\boxed{3}$ $\left|\frac{dg}{dx}\right| \simeq 1 \longrightarrow$ converg. slowly

يعني راح أوصل ~~للحل~~ للحل لكن بدي عدد iteration
كبير.

ex:- $f(x) = x^3 + 5x^2 - 2$

a. $x = \frac{2-5x^2}{x} \rightarrow \left|\frac{dg}{dx}\right| = -10x = -10\times 1 = +10 > 1$

divarge

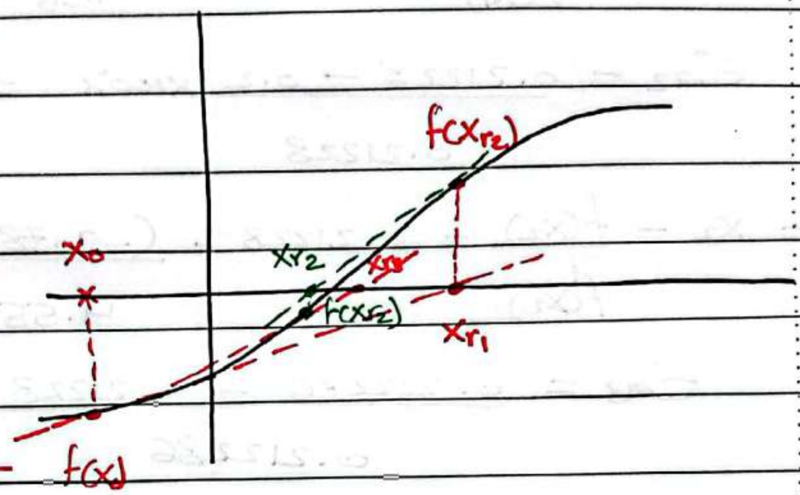
b. $x = \sqrt{\frac{2-x}{5}} \rightarrow \frac{dg}{dx} = \frac{-\frac{1}{5}}{2\sqrt{\frac{2-x}{5}}} = \frac{-1/5}{2\sqrt{\frac{2-1}{5}}} = 0.223 < 1$

converge

c. ~~x(5x+1)~~

$x(5x+1) - 2 \longrightarrow \frac{dg}{dx} = x(5) + (5x+1) = 5 + 6 = 11$

$\boxed{2}$ Newton Raphson N.R



$f(x)$ ← بوجد المشتقة عند النقطة بعمل خط مماس يقطع محور السينات نقطة القطع هي x_{r_1} بتكون عبارة عن المشتقة.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

ex :- estimite the root for $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ using N.R method $(x_0 = 0)$, $\epsilon_s \leq 1\%$

① اول اشي بوجد المشتقة لانها موجودة بالقانون

$$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$$

$$f'(x) = 9x^2 - 4x + 5$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{(-1)}{5} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$\epsilon_{a_1} = \frac{0.2 - 0}{0.2} \times 100\% = 100\%$$

Subject Date No.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.2 - \frac{(-0.056)}{4.56} = 0.21228$$

$$\epsilon_{a2} = \frac{0.21228 - 0.2}{0.21228} \times 100\% = 5.78\%$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.21228 - \frac{(-2.78 \times 10^{-5})}{4.556} = 0.212286$$

$$\epsilon_{a3} = \frac{0.212286 - 0.21228}{0.212286} \times 100\% = 0.00283\%$$

Subject Lec 7 Date 22/3/2022 No.

غير

* problem

1. $f'(x) \simeq 0$ تعني قسمة على الصفر

hue to poor choies of (x_0) → الحل تغير قيمة x_0

2. If f or f' has the same root

$f(x) = (x-1)^3$ → Slow convergance

$f'(x) = 3(x-1)^2$

* Assum $Ux = \frac{f(x)}{f'(x)}$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{U(x)}{U'(x)}$$

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f \cdot f'}{f'^2 - f f''}}$$ modife Newoton Raphson

← حل مشكلة slow convergance

$f(x) = \cos(x e^{5x^2+6}) \sin\sqrt{x}$ مهم صعب يعني تفاضله

↳ $f' = \frac{\Delta f}{\Delta x}$

↳ $$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}}$$ Secant method

← يحتاج 2 initial value

Subject Date No.

* example For secant method

Estimat x_r For $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$

using secant method $x_i = 0$

$x_{i-1} = -0.5$

$\epsilon_s \le 1\%$

أول اشي بوجد قيمة بتعويض القيمتين المعطى بالمعادلة

$f(x_0) = -1$

$f(x_{i-1}) = 3(-0.5)^3 - 2(-0.5)^2 + (5 \times -0.5) - 1 = -4.375$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_0) - f(x_{i-1})} = 0 - \frac{(-1)(0-(-0.5))}{(-1)-(-4.375)}$$

$$= 0.148$$

$$\epsilon_{s_1} = \frac{0.148 - 0}{0.148} \times 100\% = 100\%$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f x_1 (x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = 0.148 - \frac{(-0.294)(0.148 - 0)}{-0.294 - (-1)}$$

$$= 0.2096$$

$$\epsilon_{s_2} = \frac{0.2096 - 0.148}{0.2096} \times 100\% = 29.4\%$$

Subject Date No.

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = 0.2096 - \frac{(-0.0122)(0.2096 - 0.148)}{-0.0122 - (-0.294)}$$

$$= 0.2096 - \frac{(-7.5152 \times 10^{-4})}{0.2818}$$

$$= 0.2123$$

$$\epsilon_{s3} = \frac{0.2123 - 0.2096}{0.2123} \times 100\% = 1.27\%$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)(x_3 - x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} = 0.2123 - \frac{(6.33 \times 10^{-5})(0.2123 - 0.2096)}{6.33 \times 10^{-5} - (-0.0122)}$$

$$= 0.2123$$

$$\epsilon_{s4} = \frac{0.2123 - 0.2123}{0.2123} \times 100\% = 0\%$$

Subject Lec - 8 Date 24/3/2022 No.

ex $f(x) = (x-5)^3$ compar 4^{th} iteration true error for N.R and M.N.R method used $x_0 = 0$

[1] N.R

$f(x) = (x-5)^3$

$f'(x) = 3(x-5)^2$

true value $\longrightarrow x-5=0 \longrightarrow \boxed{x=5}$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{(-125)}{75} = 1.667$$

$$\epsilon_{T_1} = \frac{5-1.667}{5} \times 100\% = 66.66\%$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.667 - \frac{(-37.025)}{33.33} = 2.778$$

$$\epsilon_{T_2} = \frac{5-2.778}{5} \times 100\% = 44.44\%$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2.778 - \frac{(-10.97)}{14.81} = 3.5187$$

$$\epsilon_{T_3} = \frac{5-3.5187}{5} \times 100\% = 29.6\%$$

Subject Date No.

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 3.5187 - \frac{(-3.25)}{6.583} = 4.01$$

$$\epsilon_{T_4} = \frac{5 - 4.01}{5} \times 100\% = 19.75\%$$

$\boxed{2}$ M.N.R

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f \cdot f'}{f'^2 - (f \cdot f'')}$$

$$f'(x) = 3(x-5)^2 = 75$$

$$f''(x) = 6(x-5) = -30$$

$$x_1 = 0 - \frac{(-125 \times 75)}{75^2 - (-125 \times -30)}$$

$$= 5$$

$$\epsilon_{T_1} = \frac{5-5}{5} \times 100\% = 0\%$$

Subject Date No.

(*) System of Non linear

$$x^3 y - 2xy + 1 = 0 \longrightarrow$$ حتى أوجد قيمة x , y بلزمني 2eq , الهدف هو أوجد قيمة x , y التي تحقق المعادلة.

1 → Given

$f_1(x,y) = 0$

$f_2(x,y) = 0$ with initial (x_0, y_0)

→ 2 method to solve equation

① Simply method

② Newton Raphson (used)

2 → arrange Jacobian matrix

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} \end{bmatrix}$$

الاقتران الاول بشتقه بالنسبة لـ x , ويعتبر constant y

الاقتران الثاني بشتقه بالنسبة لـ y ويعتبر x constant

3 → creat x and y

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} f_1 & \frac{df_1}{dy} \\ f_2 & \frac{df_2}{dy} \end{bmatrix} \qquad \bar{y} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx} & f_1 \\ \frac{df_2}{dx} & f_2 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

④ → Great determination x, y

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} f_1 & \frac{df_1}{dy} \\ f_2 & \frac{df_2}{dy} \end{bmatrix} \longrightarrow |\bar{x}| = f_1 \frac{df_2}{dy} - f_2 \frac{df_1}{dy}$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx} & f_1 \\ \frac{df_2}{dx} & f_2 \end{bmatrix} \longrightarrow |\bar{y}| = \frac{df_1}{dx} f_2 - \frac{df_2}{dx} f_1$$

5 → Solve iteration

$$x_{i+1} = x_i - \frac{|x_i|}{|J_i|}$$

$$y_{i+1} = y_i - \frac{|y_i|}{|J_i|}$$

⊛ Revision For matrix

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0.5 & 0.75 & 2 \end{bmatrix}$$

تسمية a_{13}

a_{22}

a_{33}

size = 3 × 3

صف ← ... → عمود

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & \frac{1}{2} \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$ 2×3

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$ 3×2

Subject Lec - 9 -   Date 27/3/2022 No.

ex calculate the 2^{nd} root estimate for

$$x^2 + xy = 10$$

$$y + 3xy^2 = 57$$

using N.R method use $x_o = 1$ $y_o = 2$

$$f_1(x,y) = x^2 + xy - 10$$

$$f_2(x,y) = y + 3xy^2 - 57$$

١- بساوي المعادلات بالصفر

٢- معادلة $\bar{J}$ راح اصنع اشتقاق المعادلتين بالنسبة لـ x , y

$$\frac{df_1}{dx} = 2x + y$$

$$\frac{df_1}{dy} = x$$

$$\frac{df_2}{dx} = 3y^2$$

$$\frac{df_2}{dy} = 1 + 6xy$$

٣- بعوض بقانون $\bar{J}$

$$\bar{J}_1 = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times1+2 & 1 \\ 3\times2^2 & 1+6\times1\times2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 13 \end{bmatrix}$$

Subject Date No.

٤. بوجد قيمة $\bar{x}$

تعويض بالمعادلة الاصلية

قيمهم جبيبهم من $\bar{J}$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} f_1 & \frac{df_1}{dy} \\ f_2 & \frac{df_2}{dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2 + 1\times2 - 10 & 1 \\ 2 + 3\times1\times2^2 - 57 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -43 & 13 \end{bmatrix}$$

٥. بوجد قيمة $\bar{y}$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx} & f_1 \\ \frac{df_2}{dx} & f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 12 & -43 \end{bmatrix}$$

القيم جاهزة بدون تعويض من

$\bar{x}$ ، $\bar{J}$

٦. بعوض هسا بقانون X_r

$\boxed{1}$ $$x_{i+1} = x_i - \frac{|\bar{x}_i|}{|\bar{J}_i|} \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{|\bar{x}_0|}{|\bar{J}_0|}$$

$$= 1 - \frac{(-7\times13 - -43\times1)}{(4\times13 - 12\times1)} = 2.2$$

$\boxed{2}$ $$y_{i+1} = y_i - \frac{|\bar{y}_i|}{|\bar{J}_0|} \Rightarrow y_1 = y_0 - \frac{|\bar{y}_0|}{|\bar{J}_0|}$$

$$= 2 - \frac{(4\times-43 - -7\times12)}{(4\times13 - 12\times1)} = 4.2$$

Subject Date No.

٧. NLE iteration بنفس الخطوات، بعوض x_1 ، y_1

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} 8.6 & 2.2 \\ 52.92 & 56.44 \end{bmatrix} \qquad |\bar{J}| = (8.6 \times 56.44) - (2.2 \times 52.92) = 368.96$$

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 4.08 & 2.2 \\ 63.624 & 56.44 \end{bmatrix} \qquad |\bar{x}| = (4.08 \times 56.44) - (63.624 \times 2.2) = 90.3024$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 8.6 & 4.08 \\ 52.92 & 63.624 \end{bmatrix} \qquad |\bar{y}| = (8.6 \times 63.624) - (52.92 \times 4.08) = 331.2528$$

$$x_2 = x_1 - \frac{|\bar{x}_1|}{|\bar{J}_1|} = 2.2 - \frac{90.3024}{368.96} = 1.95$$

$$y_2 = y_1 - \frac{|\bar{y}_1|}{|\bar{J}_1|} = 4.2 - \frac{331.2528}{368.96} = 3.3$$

Subject Lec - 10 - Date 29/3/2022 No.

Matrix operation

- introduction

when Given matrix $\bar{A}_{\underline{m \times L}}$ (size)

$m \rightarrow$ #of rows

$L \rightarrow$ #.of column.

$$\underset{3\times2}{\bar{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$-1 \rightarrow a_{12}$

$5 \rightarrow a_{31}$

[1] matrix addition and sub.

$\bar{A}_{m \times L} + \bar{B}_{m \times L} \longrightarrow$ لجمعهم أو طرحهم لازم تحقق شرط
لازم يكونو نفس size

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \bar{B} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}+\bar{B} = \begin{bmatrix} 2+(-1) & 5+4 \\ 3+3 & -1+1 \\ 4+(-2) & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}+\bar{B} = \bar{B}+\bar{A}$$

$$\bar{A} - \bar{B} = \begin{bmatrix} 2-(-1) & 5-4 \\ 3-3 & -1-1 \\ 4-(-2) & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} - \bar{A} = \begin{bmatrix} -1-2 & 4-5 \\ 3-3 & +1-(-1) \\ -2-4 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 2 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} - \bar{B} \neq \bar{B} - \bar{A}$$

$\boxed{2}$ matrix multiplication

→ # of column in $\bar{A}$ must equal #. of row in $\bar{B}$

→ result = # of row in $\bar{A}$ * #. of column in $\bar{B}$

$$\underset{3\times2}{\bar{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underset{2\times1}{\bar{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{3\times 2}{\bar{A}} * \underset{2\times 1}{\bar{B}} = \underset{3\times1}{\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{31} \end{bmatrix}}$$

size الناتج

متساوين إذا تحقق الشرط

Subject Date No.

$C_{11} = 2\times2 + 3\times1 = 7$

$C_{21} = 5\times2 + 4\times1 = 14$

$C_{31} = 3\times2 + 2\times1 = 8$

$$\bar{A} \times \bar{B} = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$\bar{B} \times \bar{A} \rightarrow$ مش مساوين ما تحقق الشرط

$2\times1 \neq 3\times2$

$\boxed{3}$ matrix inverse $[A^{-1}]$

$\bar{A} \times \bar{A}^{-1} = I$ [matrix unit]

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{4}$ matrix transpose $[A^T]$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$\bar{A} \rightarrow A^T \rightarrow$ الصف بصير عمود

$A^T \rightarrow \bar{A} \rightarrow$ العمود بصير صف.

Subject   Date   No.

(*) Row operation

$\boxed{A}$ Row swapping → تبديل الصفوف مع بعض لكن بشرط نبدل الصف كامل مع النواتج

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Row swapping } R_2 \longleftrightarrow R_3$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$\boxed{B}$ Row addition

$$2R_2 + R_3 \Longleftrightarrow R_3$$

replacement

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2a_{21}+a_{31} & 2a_{22}+a_{32} & 2a_{23}+a_{33} \end{bmatrix}$$

Subject Date No.

$$f_1(x_1, x_2, x_3 ----, x_n) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 ---- + a_{1n}x_n$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3 ---, x_n) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 ---- + a_{2n}x_n$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_1, x_2, x_3 --- x_n) = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 ---- + a_{nn}x_n$$

$\bar{A} \longrightarrow$ coefficent matrix

$\bar{B} \longrightarrow$ awarible matrix

$\bar{b} \longrightarrow$ result matrix

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = \bar{b}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & --- & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & --- & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & --- & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ex

$$2x_1 - x_2 = 5$$

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$\bar{A}\bar{x} = \bar{b} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Subject Lec - 11 - Date 31/3/2022 No.

(*) Naive gauss

$$\bar{A}\,\bar{X} = \bar{b}$$

coefficient ← $\bar{A}$, variable ← $\bar{X}$, result ← $\bar{b}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

① Augment matrix $\bar{A}$ and $\bar{b}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

حول المعادلات الى صيغة.

تعني يساوي

② using row operation to reduce matrix $\bar{A}$ to an upper triangular matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

بعد ما أحول الماتركس لهذا الشكل بقدر أوجد قيمة المتغيرات (x_1, x_2, x_3)

a_{11} , a_{22} → pivot عبارة عن

ارقام اللي تحتهم لازم تكون القيمة صفر

Subject Date No.

ex Solve the following system using naive gauss elemination

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 - 3x_2 - x_3 = -2$$
$$3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 5$$

ملاحظة ← أي ثوابت لازم تكون بعد المساواة

1. $\bar{A} \cdot \bar{x} = \bar{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -2 & 5 \end{array}\right] = \begin{array}{c} \text{Pivot} \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

← ملاحظة : لازم أرتب من الأعلى للأقل

← بحدد قيمة Pivot اللي صفر الارقام تحتها

$$\begin{array}{c} \text{Pivot} \\ \text{صفوف لازم أصفرهم} \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \to -\frac{a_{21}}{\text{Pivot}} \to -\frac{2}{3}R_1 + R_2 \leftrightarrow R_2 \\ \to -\frac{1}{3}R_1 + R_3 \leftrightarrow R_3 \end{array}$$

Subject Date No.

-2	-2.67	1.33	-3.33
2	-3	-1	-2

+

$\boxed{0 \quad -5.67 \quad 0.33 \quad -5.33} \rightarrow R_2$

-1	-1.33	0.67	-1.67
1	1	1	3

+

$\boxed{0 \quad -0.33 \quad 1.67 \quad 1.33} \rightarrow R_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -5.67 & 0.33 & -5.33 \\ 0 & -0.33 & 1.67 & 1.33 \end{array}\right] \rightarrow -\frac{(-0.33)}{-5.67} R_2 + R_3 \longleftrightarrow R_3$$

Pivot

لازم يساوي صفر

0	0.33	-0.019	0.31
0	-0.33	1.67	1.33

+

$\boxed{0 \quad 0 \quad +1.651 \quad 1.64} \rightarrow R_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -5.67 & 0.33 & -5.33 \\ 0 & 0 & 1.651 & 1.64 \end{array}\right]$$

نوجد قيم المتغيرات ←

$1.651 X_3 = 1.64 \longrightarrow \boxed{X_3 = 0.99}$

$-5.67 X_2 + 0.33 X_3 = -5.33 \longrightarrow \boxed{X_2 = 0.998}$

$3X_1 + 4X_2 + (-2X_3) = 5 \longrightarrow \boxed{X_1 = 0.996}$

N O T E B O O K

Subject Date No.

(*) قاعدتان يجب مراعاتهما في قانون naive gauss

[1] Pivot = 0 → لما تكون pivot بتساوي zero

بيدل الصفوف أكبر رقم موجود

بحطه هو pivot ويرتب باقي الأرقام

من الكبير للصغير

(*) ex

$$x_2 - x_3 = 5$$
$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3$$
$$x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 4$$

Pivot لوزم ابدل مكانو .

[1]
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

Pivot

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \rightarrow -\frac{1}{2}R_1 + R_2$$

رتبت العمود الموجود فيه pivot تنازلياً .

$$\begin{array}{cccc} -1 & -1.5 & 2 & -1.5 \\ 1 & -5 & 2 & 4 \\ \hline \boxed{0 & -6.5 & 4 & 2.5} \end{array} \rightarrow R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & -6.5 & 4 & 2.5 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow -\frac{1}{-6.5}R_2 + R_3 \longleftrightarrow R_3$$

Pivot

حتى هون لازم أتأكد إنه pivot أعلى رقم

$$\begin{array}{cccc} 0 & -1 & 0.615 & 0.38 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -0.385 & 5.38 \end{array}} \longrightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & -6.5 & 4 & 2.5 \\ 0 & 0 & -0.385 & 5.38 \end{array}\right]$$

$$-0.385\,x_3 = 5.38 \longrightarrow \boxed{x_3 = -13.9}$$

$$-6.5x_2 + 4x_3 = 2.5 \longrightarrow \boxed{x_2 = -8.92}$$

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3 \longrightarrow \boxed{x_1 = -12.92}$$

Subject Lec - 12 - Date 5/4/2022 No.

* Gauss Jordan (unity matrix)

← الترتيب هنا مش مهم (pivot)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_{22} & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

$a_{33}x_3 = b_3$

$a_{22}x_2 = b_2$

$a_{11}x_1 = b_1$

* ILL-condition system

$$\begin{bmatrix} 100 & -101 \\ 200 & -200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \end{bmatrix}$$

* ممكن نحل ← الحذف والتعويض
← niave gauss
← cramer rule

→ cramer rules

→ #. of variable ≤ 3 (شرط الاستخدام)

← هنا احسب قيم x_1 و x_2 كالتالي

هون بدل العمود الاول حط قيم b

بضلهم نفس الاشي

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 200 & -101 \\ 300 & -200 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 100 & -101 \\ 200 & -200 \end{vmatrix}} = \frac{(200 \times -200) - (-101 \times 300)}{(100 \times -200) - (-101 \times 200)} = \frac{-9700}{200} = -48.5$$

← الاصلية matrix

Subject　　　　Date　　　　No.

قيمة ط بتصير بالعمود الثاني

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 100 & 200 \\ 200 & 300 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 100 & -101 \\ 200 & -200 \end{vmatrix}} = \frac{-10000}{200} = -50$$

* لو عملت تغير بسيط على قيم matrix شو بيصير بقيم X_1 و X_2

$$\begin{bmatrix} 100 & -99 \\ 200 & -200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 200 & -99 \\ 300 & -200 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 100 & -99 \\ 200 & -200 \end{vmatrix}} = \frac{-10300}{-200} = 51.5$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 100 & 200 \\ 200 & 300 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 100 & -99 \\ 200 & -200 \end{vmatrix}} = \frac{-10000}{-200} = 50$$

← صار تغير كبير بقيم X_1 , X_2

* غ test بعلو مني أعرف هل الانترعى ILL or will

ILL → بصير تغير كبير بقيم المتغيرات

will ← ما بصير تغير بقيم المتغيرات.

Subject | Date | No.

* How to check system condition if $Det\ \bar{A} = 0$ the system is ILL condition

صفر، قريبة كثير من الصفر.

ex check condition if ILL or will condition

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1.8 & 2.9 \\ 0.85 & 2.1 & 3.1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} /3 \\ /2.9 \\ /3.1 \end{array}$$

① أول خطوة لازم أعملها أكبر قيمة من كل صف لازم تساوي 1 أو أقل لهيك تقسم على أكبر رقم مطلق موجود بالصف على الصف بالكامل

$$\begin{bmatrix} 0.33 & 0.667 & 1 \\ 0.34 & 0.62 & 1 \\ 0.27 & 0.677 & 1 \end{bmatrix}$$

② نحسب قيمة Det بطلع عن الصف الأول.

$$0.33 \begin{bmatrix} 0.62 & 1 \\ 0.677 & 1 \end{bmatrix} = 0.33(0.62 \times 1 - 1 \times 0.677) = -0.01881$$

$$0.667 \begin{bmatrix} 0.34 & 1 \\ 0.27 & 1 \end{bmatrix} = 0.667(0.34 \times 1 - 1 \times 0.27) = 0.04669$$

Subject Date No.

$$\left[\begin{array}{cc|c} \cancel{0.33} & \cancel{0.667} & 1 \\ 0.34 & 0.62 & 1 \\ 0.27 & 0.677 & 1 \end{array}\right] = 1\,(0.34 \times 0.677 - 0.27 \times 0.62) = 0.06278$$

~~Det = −0.01881~~

$$Det = Det_{row1} - Det_{row2} + Det_{row3}$$

$$= -0.01881 - 0.04669 + 0.06278$$

$$= -0.00272$$ قريب من zero

$\therefore$ ILL-condition.

HW

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ -0.85 & 2.1 & 3.1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} /3 \\ /5 \\ /3.1 \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0.667 & 0.33 \\ -0.2 & 1 & 0.4 \\ -0.27 & 0.677 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Det = 1(1 \times 1 - 0.4 \times 0.677) - 0.667(-0.2 \times 1 - 0.4 \times -0.27) + 0.33(-0.2 \times 0.677 - -0.27 \times 1)$$

$$= 0.7292 - (-0.061364) + 0.044418$$

$$= 0.83$$ will - condition

Subject Lec -13- Date 7/4/2022 No.

(*) Singular Solution

→ No solution

→ Infinit Solution

[I] system with Infinit Solution

ex

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = \text{zero} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = \text{zero}$$

Infinit Sol. تعني $\frac{0}{0}$ تساوي x_2 و x_1 قيم

ex

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \leftarrow 0 = 0$$

غير مقبولة

تعني عدد لا نهائي من الحلول.

Scanned with CamScanner

Subject Date No.

② System with No Solution

ex

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{0} \rightarrow \text{No Solution}$$

ex

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & \frac{1}{2} & & -2 \\ 2 & 1 & -3 & & -1 \\ 0 & 0 & 0 & & -2 \end{array}\right]$$

$0 = -2$!! غير ممكن

No Solution

Subject Date No.

* L.U. decomposition

حل النظام الخطي بدون استخدام Gauss ←

$$\bar{A}\,\bar{X} = \bar{b}$$

[1] matrix $\bar{A}$ is decomposed in Two matrix

$$\bar{A} = \underset{=}{\bar{L}} \cdot \underset{=}{\bar{U}}$$

lower diagonal matrix ← L ; U → upper diagonal matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{1}{L_{11}} & 0 & 0 \\ L_{21} & \overset{1}{L_{22}} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & \overset{1}{L_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

[2] $\bar{L}\,\bar{U}\,\bar{X} = \bar{b}$ assum $\bar{U}\,\bar{X} = \bar{d}$ so $\bar{L}\,\bar{d} = \bar{b}$

so I found value $\bar{d}$

[3] Find x by solve $\bar{U}\,\bar{X} = \bar{d}$

→ اوجدتها بخطوة $\underline{\underline{2}}$

* In this method assum the main diagonal For lower matrix = 1

Subject Date No.

⊛ خطوات الحل :—

main diagonal فرض 1

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{23} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

ضرب الماتركس = صف × عمود.

$$a_{11} = (L_{11} * U_{11}) + (0 \times 0) + (0 \times 0)$$

a_{11} ← معطى L_{11} ← فرض $= 1$ U_{11} → ??

$$a_{12} = (L_{11} \times U_{12}) + (0 \times U_{22}) + (0 \times 0)$$

a_{12} ← معطى L_{11} ← 1 U_{12} → ?? U_{22} → 0

$$a_{13} = (L_{11} \times U_{13}) + (0 \times U_{23}) + (0 \times U_{33})$$

a_{13} ← معطى L_{11} ← 1 U_{13} ← ?? U_{23} → 0 U_{33} → 0 ex Solve the Following system using $\bar{L}.\bar{U}$ decomposition method.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}}_{\bar{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\bar{b}}$$

$\boxed{1}$ $$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

$\rightarrow a_{11} = (L_{11} \times U_{11}) + (0 \times 0) + (0 \times 0) = 2 = 1 \times U_{11} \longrightarrow \boxed{U_{11} = 2}$

$\rightarrow 3 = (L_{11} \times U_{12}) + (0 \times U_{22}) + (0 \times 0) = 3 = 1 \times U_{12} \longrightarrow \boxed{U_{12} = 3}$

$\rightarrow -2 = L_{11} \times U_{13} \longrightarrow \boxed{U_{13} = -2}$

$\rightarrow 1 = L_{21}\, U_{11} \longrightarrow 1 = L_{21} \times 2 \longrightarrow \boxed{L_{21} = 0.5}$

$\rightarrow 2 = (L_{21}\, U_{12}) + (L_{22} \times U_{22}) \rightarrow 2 = (0.5 \times 3) + (1 \times U_{22}) \rightarrow \boxed{U_{22} = 0.5}$

$\rightarrow 3 = (L_{21}\, U_{13}) + (L_{22} \times U_{23}) + (0 \times U_{33}) = (0.5 \times -2) + (1 \times U_{23}) \rightarrow \boxed{U_{23} = 4}$

$\rightarrow 5 = L_{31}\, U_{11} \longrightarrow L_{31} = 2.5$

$\rightarrow 4 = (L_{31}\, U_{12}) + (L_{32} \times U_{22}) \rightarrow 4 = (2.5 \times 3) + (L_{32} \times 0.5) \rightarrow \boxed{L_{32} = -7}$

$\rightarrow -1 = (L_{31}\, U_{13}) + (L_{32} \times U_{23}) + (L_{33} \times U_{33})$

$-1 = (2.5 \times -2) + (-7 \times 4) + (1 \times U_{33}) \longrightarrow \boxed{U_{33} = 32}$

Subject Date No.

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 2.5 & -7 & 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{U} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0.5 & 4 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$$

[2] $\bar{L}\bar{d} = \bar{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 2.5 & -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\underset{3\times 1}{=} \;\; \bar{U}\bar{X}$

$\underbrace{3\times 3 \quad 3\times 1}_{\text{اسة}}$

$1 \times d_1 = 2 \longrightarrow \boxed{d_1 = 2}$

$0.5 d_1 + d_2 = 1 \longrightarrow \boxed{d_2 = 0}$

$2.5 d_1 - 7 d_2 + d_3 = 2 \longrightarrow \boxed{d_3 = -3}$

$$\bar{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

[3] $\bar{d} = \bar{U}\bar{X}$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0.5 & 4 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$32 X_3 = -3 \longrightarrow \boxed{X_3 = -0.09}$

$0.5 X_2 + 4 X_3 = 0 \longrightarrow \boxed{X_2 = 0.75}$

$2X_1 + 3X_2 + -2X_3 = 2 \longrightarrow \boxed{X_1 = -0.215}$

Subject Lec-14 - Date 10/4/2022 No.

(*) Matrix Inverse

review : d matrix usually consist 1 column in $\bar{L}.\bar{U}$ method.

Calculating matrix inverse using $\bar{L}.\bar{U}$ method.

$\bar{A} \cdot \bar{A}^{-1} = I$

each element inknown.

(*) Inverse has the same size of origin matrix.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \qquad b_1 \quad b_2 \quad b_3$

نفصل مجموعة مع ثلاثة

$\Rightarrow$ نفصل inverse matrix في مجموعة ثلاثة

$\Rightarrow \bar{A} \cdot \bar{x}_1 = \bar{b}_1$

العمود الأول من Inverse matrix

العمود الأول I

$\Rightarrow \bar{A} \cdot \bar{x}_2 = \bar{b}_2$

$\Rightarrow \bar{A} \cdot \bar{x}_3 = \bar{b}_3$

N O T E B O O K

Subject Date No.

ex calculate the third column of the inverse matrix for

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Sol $b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\bar{I} \cdot \bar{U}$

I no matrix

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 2.5 & -7 & 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{U} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0.5 & 4 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} \cdot \bar{x}_3 = \bar{b}_3$$

$$\bar{I} \cdot \underbrace{\bar{U} \cdot \bar{x}_3}_{\bar{d}_3} = \bar{b}_3$$

$$\bar{I} \cdot \bar{d}_3 = \bar{b}_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 2.5 & -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{13} \\ d_{23} \\ d_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$d_{13} = 0$

$d_{23} = 0$ $\qquad d_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$d_{33} = 1$

$\overline{d_3} = \overline{U} \cdot \overline{X_3}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0.5 & 4 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix}$$

$\boxed{x_{33} = 32}$ $\quad \boxed{x_{23} = -0.25}$ $\quad \boxed{x_{13} = 0.4}$

So $x_3 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ -0.25 \\ 32 \end{bmatrix}$

inverse matrix ع العمود الثالث

⊛ Practis : Find x_1 and x_2 in the inverse matrix.

Subject Lec - 15 - Date 12/4/2022 No.

(*) Jacobi and Gauss seidal Iteration

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2$$
$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3$$

with initial value $\Rightarrow$ x_{1_0} , x_{2_0} , x_{3_0}

$$\Rightarrow x_{1_{i+1}} = \frac{b_1 - a_{12} x_{2_i} - a_{13} x_{3_i}}{a_{11}}$$

$$\Rightarrow x_{2_{i+1}} = \frac{b_2 - a_{21} x_{1_i} - a_{23} x_{3_i}}{a_{22}}$$

$$\Rightarrow x_{3_{i+1}} = \frac{b_3 - a_{31} x_1 - a_{32} x_2}{a_{33}}$$

في قاعدة بتجرد
من كل معادلة أي
x_1 , x_2 , x_3
هي تكون موضوع
للقانون .

(*) test

$$\Rightarrow |a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|$$

$$\Rightarrow |a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|$$

$$\Rightarrow |a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}|$$

Subject Date No.

example

Solve the following system of linear equation using Jacobi seidel, using $x_0 = [0, 0, 0] = [x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}]$, $\epsilon_s \leq 1\%$

$6x_1 - 2x_2 + x_3 = 11$ $6 > 3 \rightarrow x_1$

$-2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 5$ $7 > 4 \rightarrow x_2$

$x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1$ $5 > 3 \rightarrow x_3$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{11 + 2x_2 + x_3}{6}$$

$$x_2 = \frac{5 + 2x_1 - 2x_3}{7}$$

$$x_3 = \frac{-1 - x_1 - 2x_2}{-5}$$

$$\Rightarrow x_{1_{(1)}} = \frac{11 + 2x_{2_0} + x_{3_0}}{6} = \frac{11 + 2\times 0 + 0}{6} = 1.83$$

$$\epsilon_{a_1} = \frac{1.83 - 0}{1.83} = 100\%$$

$$\Rightarrow x_{2_1} = \frac{5 + 2\times 0 - 2\times 0}{7} = 0.714$$

$$\epsilon_{a_1} = \frac{0.714 - 0}{0.714} = 100\%$$

Scanned with CamScanner

Subject Date No.

$$\Rightarrow x_{3_1} = \frac{-1-0-0}{-5} = 0.2$$

$$\epsilon_{a1} = \frac{0.2-0}{0.2} = 100\%$$

$$\Rightarrow x_{1_{(2)}} = \frac{11 + 2\times 0.714 - 0.2}{6} = 2.038 \rightarrow \epsilon_{a2} = 10.2\%$$

$$\Rightarrow x_{2_2} = \frac{5 + 2(1.83) - 2(0.2)}{7} = 1.18 \rightarrow \epsilon_{a2} = 39.5\%$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{-1 - (1.83) - 2(0.714)}{-5} = 0.85 \rightarrow \epsilon_{a2} = 76.47\%$$

③ Guass Seidel

ex Solve using guass seidel ?

أمر شيّق مستيها بعرضها

$$X_{1_{1st}} = \frac{11 + 2X_2 - X_3}{6} = \frac{11 + 0 - 0}{6} = 1.83$$

$X_1 = 1.83$ أمر شيّق بعوضها $X_3 = 0$

$$X_{2_1} = \frac{5 + 2X_1 - 2X_3}{7} = \frac{5 + 2(1.83) - 2\times 0}{7} = 1.24$$

1.83 $X_2 = 1.24$

$$X_{3_1} = \frac{-1 - X_1 - 2X_2}{-5} = \frac{-1 - (1.83) - 2\times(1.24)}{-5} = 1.06$$

Subject Date No.

$\epsilon_{a_{x_1}} = 100\%$ $\epsilon_{a_{x_2}} = 100\%$ $\epsilon_{a_{x_3}} = 100\%$

$$x_{1_2} = \frac{11 + 2(\overset{1.24}{\cancel{1.83}}) - 1.062}{6} = 2.07$$

$$x_{2_2} = \frac{5 + 2 \times 1.83 - 2 \times 1.062}{7} = 0.93$$

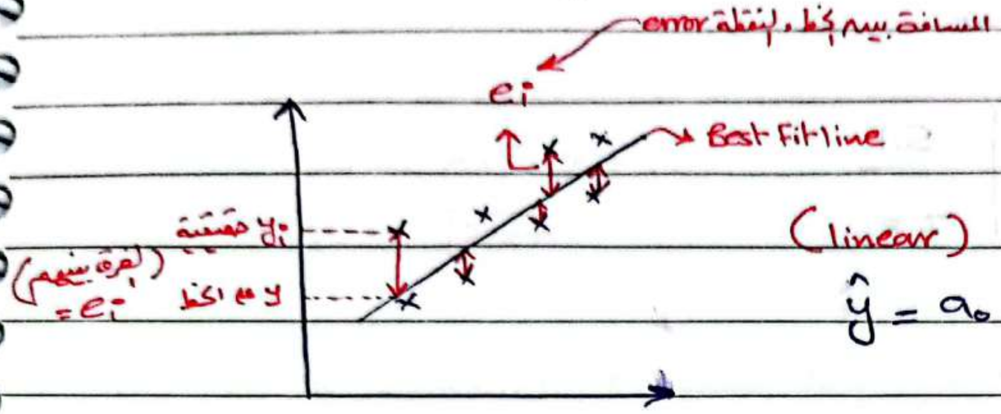
$$x_{3_2} = \frac{-1 - 1.83 - 2 \times 1.24}{-5} = 1.062$$

$\epsilon_{a_{x_1}} = 11.6\%$ $\epsilon_{a_{x_2}} = 33.3\%$ $\epsilon_{a_{x_3}} = 0\%$

* انتهاء مادة إلي *

Subject Lec - 16 - Date 14/4 No.

⊛ Curve Fitting



(linear)

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x_i$$

↳ slope $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$S_r \rightarrow \text{residual error} = \sum (e_i)^2$$

$$e_i = y_i - \hat{y} = y_i - (a_0 + a_1 x)$$

⊛ ملاحظة ، طريقة لاشتقاق معادلتين الماترکس لحد **مش مهم**

احفظ الماترکس بس

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

⊛ ملاحظة ← a_0 و a_1 بطلعهم عشان أعوضهم بالمعادلة

$$\hat{y} = a_0 + a_1 X$$

Subject Date No.

Ex using linear regression if the Following data to a stright line.

x	2	3.25	5.1
y	3.5	5.6	7.8

$n \longleftarrow$ تمثل عدد القراءات

$\boxed{n=3}$

Soll $n=3$

$$\Sigma x_i = 2 + 3.25 + 5.1 = 10.35$$

$$\Sigma x_i^2 = 2^2 + 3.25^2 + 5.1^2 = 40.57$$

$$\Sigma y_i = 3.5 + 5.6 + 7.8 = 16.9$$

$$\Sigma x_i y_i = (2 \times 3.5) + (3.25 + 5.6) + (5.1 + 7.8) = 64.98$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 10.35 \\ 10.35 & 40.57 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16.9 \\ 64.98 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} 16.9 & 10.35 \\ 64.98 & 40.57 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 10.35 \\ 10.35 & 40.57 \end{vmatrix}} = \frac{13.09}{14.58} = 0.897$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 16.9 \\ 10.35 & 64.98 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 10.35 \\ 10.35 & 40.57 \end{vmatrix}} = \frac{20.025}{14.58} = 1.373$$

$$y = 0.897 + 1.373\,X$$

Subject　　　　Date　　　　No.

* Correction coefficient factor (R)

→ use to the goodness of the purposed fit (القوة الملائمة)

1. IF $R=1$ → Exact Relation
2. IF R approach 1 → Excelent relation
3. IF R approach 0 → Poor relation
4. IF $R=0$ → x and y are Independent

→ تعني لا يوجد علاقة بينهم

* For linear Regression R is given :-

$$R = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \cdot \sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

* From last example

$n=3$　　$\sum xy = 64.98$　　$\sum x = 10.35$　　$\sum y = 16.9$

$\sum x^2 = 40.57$　　$\sum y^2 = 104.45$

$$R = \frac{(3 \times 64.98) - (10.35 \times 16.9)}{\sqrt{3 \times 40.57 - (10.35)^2}\ \sqrt{3 \times 104.45 - (16.9)^2}} = 0.995 \approx 1 \text{ Excelent relation}$$

Subject: Lec - 17 Date: 17 - 4 No.

⊛ Regression

1. linear — x ه أسها دائماً 1

   ↪ $y = a_0 + a_1 x$

2. Polynomial — x ه ة أكبر من 1

   ↪ $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 - - - + a_n x^n$

⊛ General matrix

$$
\begin{bmatrix}
n & \Sigma x & \Sigma x^2 & \cdots & \Sigma x^m \\
\Sigma x & \Sigma x^2 & \Sigma x^3 & \cdots & \Sigma x^{m+1} \\
\Sigma x^2 & \Sigma x^2 & \Sigma x^4 & \cdots & \Sigma x^{m+2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\Sigma x^m & \Sigma x^{m+1} & \Sigma x^{m+2} & & \Sigma x^{m+}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\Sigma y \\ \Sigma xy \\ \vdots \\ \\ \Sigma x^m y
\end{bmatrix}
$$

Ex using regression analysis estimate 2nd order polynomial using Following data

x	2	3.25	4	5
y	5	9	7	24.25

Subject Date No.

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x & \Sigma x^2 \\ \Sigma x & \Sigma x^2 & \Sigma x^3 \\ \Sigma x^2 & \Sigma x^3 & \Sigma x^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y \\ \Sigma xy \\ \Sigma x^2 y \end{bmatrix}$$

$n = 4$

$\Sigma x = 14.25$ $\Sigma x^2 = 55.56$ $\Sigma x^3 = 231.33$

$\Sigma x^4 = 1008.57$ $\Sigma y = 25.25$ $\Sigma xy = 88.5$

$\Sigma x^2 y = 333.31$

$$\begin{bmatrix} 4 & 14.25 & 55.56 \\ 14.25 & 55.56 & 231.33 \\ 55.56 & 231.33 & 1008.57 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25.25 \\ 88.5 \\ 333.31 \end{bmatrix}$$

↳ Solve matrix at gauss

$a_0 = -11.59$ $a_1 = 11.8$ $a_2 = -1.73$

$y = -11.59 + 11.8x - 1.73x^2$

Subject Date No.

Multiple linear regression

لو مجموعة من Point بدي أوجد العلاقة بينهم

x	
y	

→ عندي نقط X مع y

x_1	
x_2	
y	

→ عندي أكثر من متغير X مع y

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

$x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ → All are Independent

ما إلهم علاقة ببعض

For $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$

the regression coefficient can be calculated using the following system.

نقط لمتغيرين

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_1 & \Sigma x_2 \\ \Sigma x_1 & \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1 x_2 \\ \Sigma x_2 & \Sigma x_1 x_2 & \Sigma x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y \\ \Sigma x_1 y \\ \Sigma x_2 y \end{bmatrix}$$

Subject Date No.

<u>Ex</u> calculate $[a_0, a_1, a_2]$ For $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$

For Following data.

x_1	1	1	2
x_2	2	3	2
y	2	5	9

$n = 3$ $\quad \Sigma x_1 = 4$ $\quad \Sigma x_2 = 7$ $\quad \Sigma y = 16$

$\Sigma x_1^2 = 6$ $\quad \Sigma x_2^2 = 17$ $\quad \Sigma x_1 y = 25$

$\Sigma x_1 x_2 = 9$ $\quad \Sigma x_2 y = 37$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & 6 & 9 \\ 7 & 9 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 25 \\ 37 \end{bmatrix}$$

$\boxed{a_0 = -11}$ $\quad \boxed{a_1 = 7}$ $\quad \boxed{a_2 = 3}$

$y = -11 + 7x_1 + 3x_2$

Subject Lec - 18 Date 12/5 No.

⊛ Interpolation polynomial

[I] Newton Divided Difference (NDD):

– General formula.

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ b_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + b_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

→ $b_0, b_1, b_2 \cdots b_n$ → constant

(عبارة عن مجاهيل لازم أوجد قيمتهم)

→ x → x لقيمة اللي بدي أوجد y عندها.

→ $x_0, x_1, x_2 \cdots x_n$ → عبارة عن النقاط المعطى بالسؤال

→ n → order

⊛ ملاحظة :-

عدد point لازم أكبر من عدد order

⊛ to calculate NDD by :-

x	x_0	x_1	x_2	x_n
y	y_0	y_1	y_2	y_n

Subject Date No.

x_i	$f(x_i)$	1st NDD	2nd NDD	3rd NDD
x_0	$\boxed{y_0 = b_0}$	$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = b_1$	$\frac{f(x_2,x_1) - f(x_1,x_0)}{x_2 - x_0} = b_2$	$\frac{f(x_3,x_2,x_1) - f(x_2,x_1,x_0)}{x_3 - x_0} = b_3$
x_1	y_1	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$\frac{f(x_3,x_2) - f(x_2,x_1)}{x_3 - x_1}$	
x_2	y_2	$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$		
x_3	y_3			

<u>Ex</u> using NDD ~~Integration~~ Interpolation polynomial estimat $f_3(2.75)$ using the Following data

$\boxed{2.75}$

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	0	1	2.5	3
y	2	5	9	11

Subject Date No.

x_i	$f(x_i)$	1st NDD	2nd NDD	3rd NDD
0	$\boxed{2 = b_0}$	$\frac{5-2}{1-0} = \boxed{3 = b_1}$	$\frac{2.667-3}{2.5-0} = \boxed{-0.1332 = b_2}$	$\frac{0.66 - -.1332}{3-0}$ $\boxed{= 0.264 = b_3}$
1	5	$\frac{9-5}{2.5-1} = 2.667$	$\frac{4-2.667}{3-1} = 0.66$	
2.5	9	$\frac{11-9}{3-2.5} = 4$		
3	11			

$$f_3(x) = 2 + 3(x-0) - 0.1332(x-0)(x-1) + 0.264(x-0)(x-1)(x-2.5)$$

$$= 2 + 8.25 - 0.641 + 0.3176 = 9.9266.$$

Subject Lec - 19 - Date 15/5 No.

① Numerical diff :-

Ex using the following data

a. estimate $f''(2.25)$ using centered Difference with $O(h)^4$, $h = 0.25$

b. estimate $f'(2.5)$ using Backword difference with $O(h)^1$, $h = 0.5$

مهم [illegible]

	x_{i-3}	x_{i-2}	x_{i-1}	x_p	x_{i+1}	x_{i+2}	x_{i+3}
x	1.5	1.75	2	2.25	2.5	2.75	3
y	2	4.5	7.25	9.15	12	14.25	15

Soll

a. $$f''(2.25) = \frac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12h^2}$$

$$f''(2.25) = \frac{-14.25 + (16\times12) - (30\times9.15) + (16\times7.25) - 4.5}{12\times(0.25)^2}$$

$$f''(2.25) = 19.67$$

Subject | Date | No.

b. $$f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$$

$$\Rightarrow x_i = 2.5 \xrightarrow{-0.5} x_{i-1} = 2 \xrightarrow{-0.5} x_{i-2} = 1.5$$

$$f'(x_i) = \frac{3 \times f(2.5) - 4f(2) + f(1.5)}{2 \times 0.5}$$

$$= \frac{(3 \times 12) - (4 \times 7.25) + 2}{2 \times 0.5} = 9$$

⊛ هون اميز بين القوانين

centered , Backword , Forward

بعتمد حسب الـ Data المعطى بالسؤال:

← القيم بعد x_i ← Forward

← القيم قبل x_i ← Backward

← إذا القيم القبل , البعد موجودة عند قيمة x_i مش موجودة ← centered

Subject Date No.

Ex estimate $f''(0.5)$ For $f(x) = \cos^2(x)$ using Forward diff with $O(h)$ accuracy $h = 0.15$

	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}
x	0.5	0.65	0.3
$f(x)$	0.77	0.633	0.485

← تم إيجاد الصورة بالتعويض
$f(x) = \cos^2(x)$

Soll

$$f''(x) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

$$f''(0.5) = \frac{0.485 - (2 \times 0.633) + 0.77}{(0.15)^2}$$

$$= -0.488$$

* في حالة كانت h غير متساوية علينا إيجاد معادلة باستخدام interpolation ثم نشتق اشتقاق عن قواعد (calculas)

* unequal space data :- (no h)

		1.25	0.75
x	1	2.25	3
$f(x)$	2	7	9

(NO H)

at least ~~the~~ we have 3 point

find $f'(x)$ at 2.25

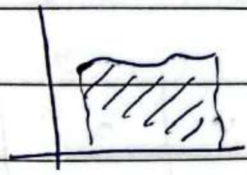
$\Rightarrow$ we using NDD $\rightarrow$ get $f(x) \longrightarrow f'(x)$

* دير بالك عن درجة الاشتقاق ⇐ هون بقدر فقط اشتق للمشتقة الثانية.

Subject Lec-20- Date 17/5/2022 No.

⊛ Numirical Integration :—

→ area under the curve.



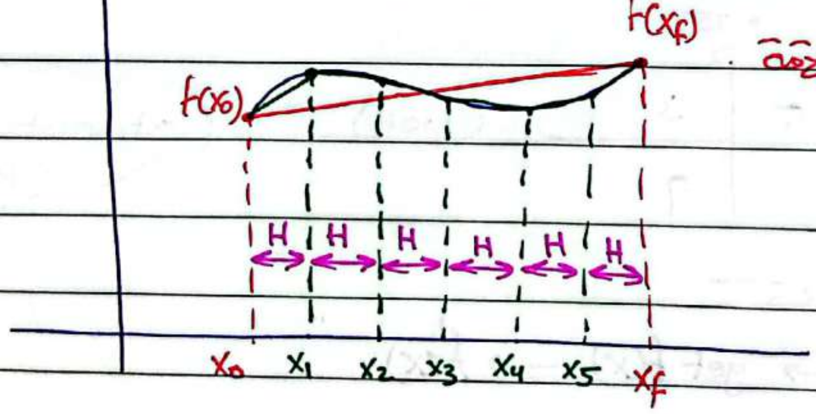
← هي أقدر احسب مساحة تحت المنحنى بدون اقتران

⊛ Numirical methods :—

1. trapezoidal Rule
2. Simpson's Rule
   a. $\frac{1}{3}$ Simpson's Rule
   b. $\frac{3}{8}$ Simpson's Rule

1 trapezoidal Rule

⊛ لازم الاقتران يكون معرف على فترة (x_0, x_f)



⊛ العلاقة بين x_0 و x_f علاقة خطية

Subject Date No.

(*) يعني تقسيم الـ area under the curve إلى مجموعة من أشباه منحرفة.

وتم حسب الـ area على نفس القانون الآتي ←

$$(\text{Integration})\quad I = \int_{x_0}^{x_f} f(x)\,dx$$

$$= \frac{x_f - x_0}{2}\left[f(x_0) + f(x_f)\right]$$

(*) عملية تقسيم الشكل لها شرط ← ① المسافة بين كل x متساوية $= h$

فبكل مرة بنزيد قيمة h حتى اوجد x_1 و x_2 و ...

(*) # of segment $= n$

So $\longrightarrow$ $h = \dfrac{x_f - x_0}{n}$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ x_1 = x_0 + h \\ x_2 = x_1 + h \\ x_3 = x_2 + h \\ x_4 = x_3 + h \end{array}}$$

$$I = \Sigma\,\text{area} = \frac{h}{2}\big(f(x_0) + f(x_1)\big) + \frac{h}{2}\big(f(x_1) + f(x_2)\big)$$

$$+ \frac{h}{2}\big(f(x_2) + f(x_3)\big) + \frac{h}{2}\big(f(x_3) + f(x_f)\big)$$

Subject Date No.

In general →

$$I = \frac{h}{2}\left[\underbrace{f(x_0)}_{\text{البداية}} + 2\sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{f(x_i)}_{\text{قيم مكررة}} + \underbrace{f(x_f)}_{\text{النهاية}}\right]$$

Ex Find the Integration using trapezoidal For

$$\int_0^{0.5} e^x\,dx \quad , \quad x_0 = 0 \quad , \quad x_f = 0.5$$

Soll

[1] الطريقة الاولى → ما أعمل تقسيم

$$I = \frac{0.5 - 0}{2}\left[f(0) - f(0.5)\right] =$$

$$= \frac{0.5}{2}\left(e^0 - e^{0.5}\right) = 0.66$$

[2] الطريقة الثانية → أعمل تقسيم

[1] # of segement = 5 ← انا بختار القيمة

[2] $h = \frac{0.5 - 0}{5} = 0.1$

$x_0 = 0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$, $x_3 = 0.3$, $x_4 = 0.4$, $x_f = 0.5$

Subject Date No.

$$I = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + \sum f(x_i) + f(x_f)\right)$$

$$= \frac{0.1}{2}\left(e^{0} + \left(e^{0.1} + e^{0.2} + e^{0.3} + e^{0.4}\right) + e^{0.5}\right) = \underline{\underline{0.641}}$$

الأكثر دقة.

[2] 1/3 Simpson's Rule

← على الأقل ٣ نقاط يعني 2 area

1- For single application

$n=2 \Rightarrow$ two area

$$h = \frac{x_f - x_i}{n}$$

$$\Rightarrow I_{\frac{1}{3}} = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_i) + f(x_f)\right)$$

⇐ x_i ← موجودة بمنتصف المسافة بين x_0 و x_f

2- For multiple application

$n > 2 \rightarrow$ must be even ((زوجي))

$$\Rightarrow I = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=2,4,6..}^{n-2} f(x_i) + 4\sum_{i=1,3,5..}^{n-1} f(x_i) + f(x_f)\right)$$

Subject Date No.

Ex Using 1/3 Simpson's Rules $\int_0^{0.5} e^x \, dx$

Sol

1. For single application

$x_0 = 0 \quad x_f = 0.5$

$$h = \frac{x_f - x_0}{2} = \frac{0.5 - 0}{2} = 0.25$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.25 = 0.25$$

$$I = \frac{0.25}{3}\left(e^0 + 4e^{0.25} + e^{0.5}\right) = 0.648.$$

2. Multiple application

$n = 6$ segment

$$h = \frac{0.5 - 0}{6} = 0.083$$

$x_0 = 0$
$x_1 = 0.83$
$x_2 = 0.166$
$x_3 = 0.249$
$x_4 = 0.332$
$x_5 = 0.415$
$x_f = x_6 = 0.5$

$$I = \frac{0.083}{3}\left(e^0 + 2\left(e^{0.166} + e^{0.332}\right) + 4\left(e^{0.083} + e^{0.249} + e^{0.415}\right) + e^{0.5}\right)$$

$= 0.6455$

Subject Lec — 21 Date 19/5/2022 No.

[3] 3/8 Simpson's Rule

↳ Minimum Number segment Required $n=3$

[1] For single $(n=3)$

$$I_{3/8} = \frac{3}{8} h \left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_f) \right]$$

[2] For $(n>3)$

$$I_{3/8} = \frac{3}{8} h \left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + 2f(x_6) - + f(x_f) \right]$$

ـــ مرتين ضرب ٣x ، ومرة ضرب ٢x

Ex Using $\frac{3}{8}$ simpson's Rule $\int_0^{0.5} e^x dx$, with out saying n , $n=3$

$x_0 = 0$, $x_f = 0.5$

$h = \frac{0.5-0}{3} = 0.16$, $x_1 = 0.16$, $x_2 = 0.32$, $x_f = 0.5$

$$I_{3/8} = \frac{3}{8} \times 0.16 \left[e^0 + 3e^{0.16} + 3e^{0.32} + e^{0.5} \right] = 0.62$$

Subject　　　　　　　　　　　　　　　　Date　　　　　　　　No.

(*) ~~Rute~~ Rung - Katta method :-　　　　حل المعادلة تفاضلية

to Solve $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$

[I] Euler's method

(*) بعطيني قيمتين (y_0 , x_0)

$$y_{i+1} = y_i + \left(f(x_i, y_i) * h\right)$$

# of iteration

h = step size.

Ex estimate $y(1)$ using Eular method for

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x^2+1}{y} \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad \text{a. } h = 1$$

x_0　y_0　　　　　　　　b. $h = 0.5$

[I] For calculas Sol :-

$$\int y \, dy = \int 5x^2 + 1 \, dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{5x^3}{3} + x + c$$

→ x_0 و y_0 ناتج تعويض قيم ← $C = \frac{1}{2}$

$$\text{so} \rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{5}{3}x^3 + x + \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{\frac{10}{3}x^3 + 2x + 1}$$

$$y(1) = \sqrt{\frac{10}{3}x^3 + 2x + 1} = \boxed{2.516}$$ exact value (true)

Subject Date No.

[2] For Eular method

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x^2+1}{y}$$

← شكل المعادلة عند الحل لازم تكون حيث .

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

[a.] For $h=1$

$x=1 \leftarrow y(1)$ المطلوب هو

أي القيمة المطلوب الوصول اليها

عدد iteration = $\underline{\underline{1}}$

$x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $f(x_0, y_0) = f(0,1) = \frac{5(0)^2+1}{1} = 1$

$x_1 = 0+1 = 1$

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) * 1$$

$$= 1 + 1\times1 = 2$$

$$\epsilon_T = \frac{2.1516 - 2}{2.516} \times 100\% = 20\%$$

[b.] For $h=0.5$

$x_0 = 0$, $x_1 = 0+0.5 = 0.5$, $x_2 = 0.5+0.5 = 1$ 2 iteration

$$y(0.5) = y_0 + f(x_0, y_0) * h = 1 + \frac{5x_0^2+1}{1} * 0.5$$

$$y(\underline{\underline{0.5}}) = \underline{\underline{1.5}}$$

x_1 ↲ y_1 ↲

ثم second iteration

Subject Date No.

$$y(1) = y(0.5) + f(0.5, 1.5) * h$$

$$= 1.5 + \frac{5(0.5^2)+1}{1.5} * 0.5 = 2.25$$

$$\epsilon_T = \frac{2.516 - 2.25}{2.516} \times 100\% = 10.56\%$$

✻ كلما كانت h قليلة كلما زادت accuracy (error قليلة)

✻ 2^{nd} order R.K-2

↔ Improvement of Eular method.

$\boxed{1}$ Henn's method

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)h$$

$$k_1 = f(x_0, y_0)$$

$$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$$

$\boxed{2}$ Mid point method

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h$$

$$k_1 = f(x_0, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + 0.5h, y_i + 0.5k_1 h)$$

✻ عدد k تعبر عن درجة order

$\boxed{3}$ Ralston Method

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{3}(k_1 + 2k_2)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h)$$

⊛ 3rd order RK-3 :—

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(\underline{x_i + 0.5h}, \underline{y_i + 0.5k_1h})$$

نعوض مكان x   نعوض مكان y

$$k_3 = f(x_i + h, y_i + k_1h + k_2h)$$

⊛ Fourth order RK-4 :—

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + 0.5h, y_i + 0.5k_1h)$$

$$k_3 = f(x_i + 0.5h, y_i + 0.5k_2h)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h)$$

Subject Date No.

Ex Estimate $y(1)$ using mid point method

For $\frac{dy}{dx} = \frac{5x^2+1}{y}$

when $y(0) = 1$, $h = 0.5$

$x_0 = 0$ ↳ two iteration

$y_0 = 1$

Mid point $\Rightarrow$ $y_{i+1} = y_i + K_2 h$

$\Rightarrow y(0.5) = y_0 + K_2 h$

$K_1 = f(x_0, y_0) = f(0, 1) = \frac{5(0)^2+1}{1} = 1$

$K_2 = f(x_i + 0.5h , y_i + 0.5K_1 h)$

$= f(0 + 0.5 \times 0.5 , 1 + 0.5 \times 1 \times 0.5)$

$= f(0.25 , 1.25) = \frac{5(0.25)^2+1}{1.25} = 1.05$

$y(0.5) = 1 + 1.05 \times 0.5 = 1.525$

$y(0.5) = 1.525 \longrightarrow x_1 = 0.5 , y_1 = 1.525$

$\Rightarrow y(1) = y_{0.5} + K_2 h$

$K_1 = f(0.5, 1.525) = \frac{5(0.5)^2+1}{1.525} = 1.476$

K

$$k_2 = f(x_1 + 0.5h \, , \, y_1 + 0.5k_1h)$$
$$= f(0.5 + (0.5 \times 0.5) \, , \, 1.525 + (0.5 \times 1.476 \times 0.5))$$
$$= 2.013$$

$$y(1) = 1.525 + 2.013 \times 0.5 = 2.531$$

<u>Ex</u> estimate $y(1)$ using RK-4 method

For $\frac{dy}{dx} = \frac{5x^2+1}{y}$

when $y(0) = 1$, $h = 1$

$x_0 = 0 \quad y_0 = 1$ one iteration.

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y(1) = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_0, y_0) = f(0,1) = \frac{5(0)^2+1}{1} = 1$$

$$k_2 = f(x_i + 0.5h \, , \, y_0 + 0.5k_1h) = f(0 + 0.5 \times 1 \, , \, 1 + 0.5 \times 1 \times 1)$$
$$= f(0.5 \, , \, 1.5) = 1.5$$

$$k_3 = f(x_i + 0.5h \, , \, y_0 + 0.5k_2h) = f(0 + 0.5 \times 1 \, , \, 1 + 0.5 \times 1.5 \times 1)$$
$$= f(0.5 \, , \, 1.75) = 1.29$$

$$k_4 = f(x_0 + h,\ y_0 + k_3 h)$$

$$= f(0+1,\ 1 + 1.29\times 1) = f(1,\ 2.29) = 2.62$$

$$y(1) = 1 + \frac{1}{6}\left(1 + 2\times 1.5 + 2\times 1.29 + 2.62\right)$$

$$= 2.53$$

$$\epsilon_T = \frac{2.516 - 2.53}{2.516} \times 100\% = 0.55\%$$