Civilittee

اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية

www.Civilittee-HU.com

دوسية الميكانيكا الإنشائية

STRUCTURAL MECHANICS

Eng:Moiad Mitani
Eng:Leen Natsheh

www.civilittee-hu.com Civilittee Hashemite Civilittee HU | لجنة المدني

بسم الله الرحمن الرحيم

نضع بين أيديكم ثمرة جهد وعمل متواصل. ملخص الميكانيكا الإنشائية لمادتي الفيرست والسكند الذي تم إعداده بعناية ليكون دليلا شاملا ومتكاملا يساعدكم على فهم المادة بعمق والاستعداد لها بأفضل طريقة ممكنة.

ماذا يميز هذا الملخص؟

1- شرح واضح ومفصل لكل المفاهيم الأساسية بأسلوب بسيط وسهل.

2- مجموعة واسعة من الأمثلة المحلولة تغطي جميع الأفكار المهمة.

3- الواجبات والأسئلة السابقة التي ستساعدكم على التدرب الفعلي على أنماط الأسئلة.

Civilittee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civilittee-HU.com

هدفنا تسهيل وصول المعرفة لكل طالب وجعل هذه الدوسية مرجعا قويا ومجانيا يساعدكم على التفوق والتميز إبتغاء لوجه الله تعالى.

هذا العمل اجتهاد بشري فإن وجدتم فيه أي خطأ نرحب بملاحظاتكم لنقوم بتصحيحه وتحسين المحتوى.

كونوا جزءا من هذا الخير وشاركوه مع أصدقائكم ولمتابعة كل جديد يمكنكم التواصل معنا عبر منصاتنا الرسمية:

YouTube Civilittee Hashemite | Website www.civilittee.com | Facebook Civilittee HU | لجنة المدني

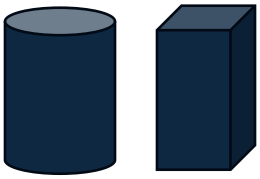
Chapter 1

stress

1.4-Stresses

-average Normal Stress in an axially loaded bar

1) **Prismatic bar** : is a straight structural member having the same cross section throughout its length .
(نفس الشكل والمساحة العرضية على طوله بالكامل)

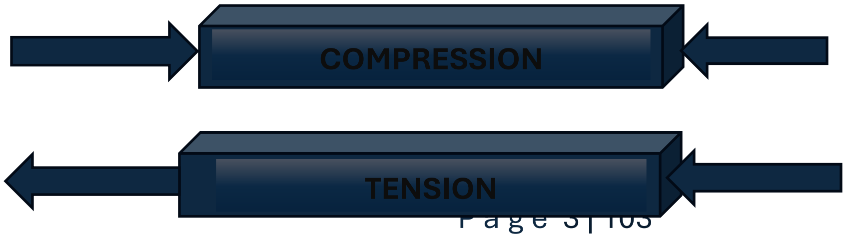


2) **Non prismatic bar** : member with non uniform stresses.
(تتغير مساحته العرضية أويتغير شكله على طوله)

3) **Homogeneous material:** Have the same physical and mechanical properties through out its volume.
(لها نفس الخصائص الفيزيائية والميكانيكية في جميع أنحاء حجمها)

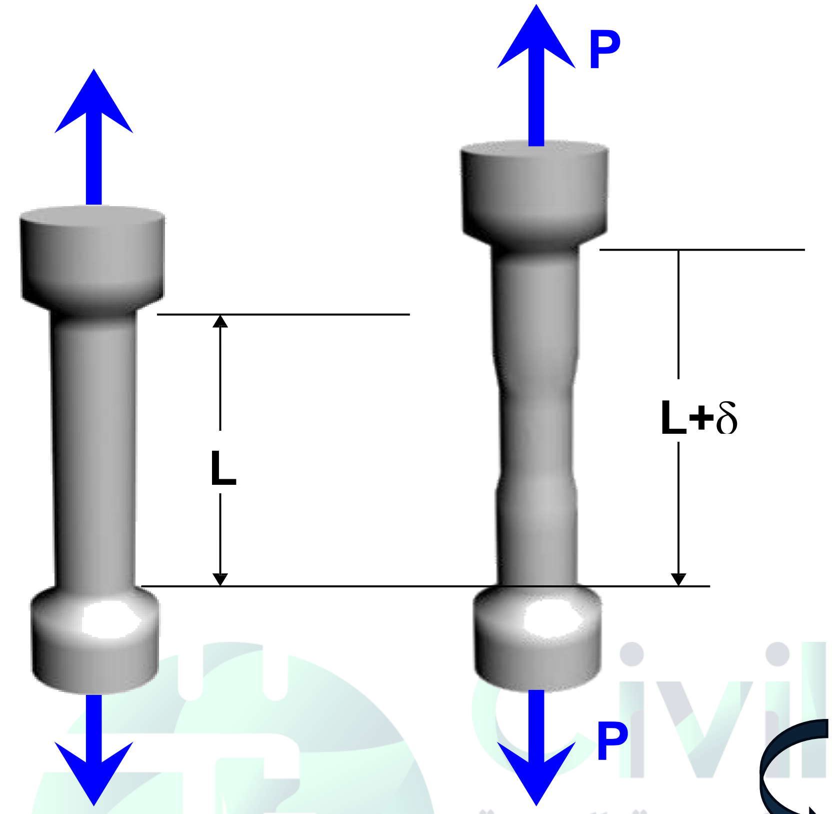
4) **isotropic material:** Have the same properties in all directions.
(لها نفس الخصائص في جميع الاتجاهات)

5) **Axial force:** A load directed along the axis of the member resulting either tension of compression in the bar.
(حمل موجه على طول محور العضو مما يؤدي إلى شد أو ضغط في الشريط)

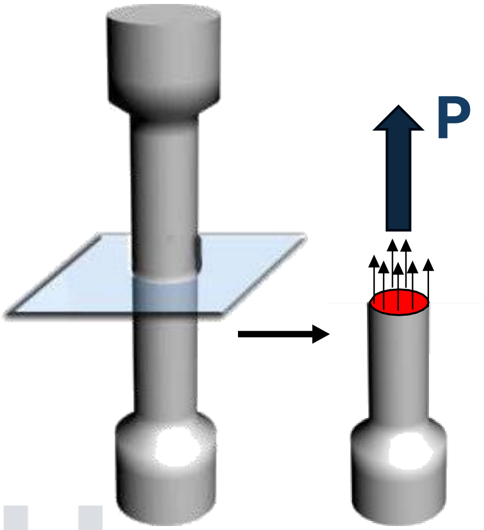


Civilittee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civilittee-HU.com

-Normal Stress (الإجهاد الطبيعي)



Prismatic Bar in tension



Normal Stress in the Bar

$$\sigma = \frac{P}{A}$$ **Units** → $\sigma = \frac{N}{m^2} \rightarrow PA$ Pascal

σ → مقدار القوة المؤثرة لكل وحدة مساحة .
(Normal Stress)

P → القوة المؤثرة على الجسم سواء شد أو ضغط.
(Axial Force)

A → مساحة المقطع العرضي للسطح الذي تؤثر عليه القوة.
(cross-sectional Area)

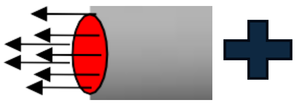
-Note:

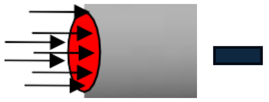
1kpa=$10^3 pa$

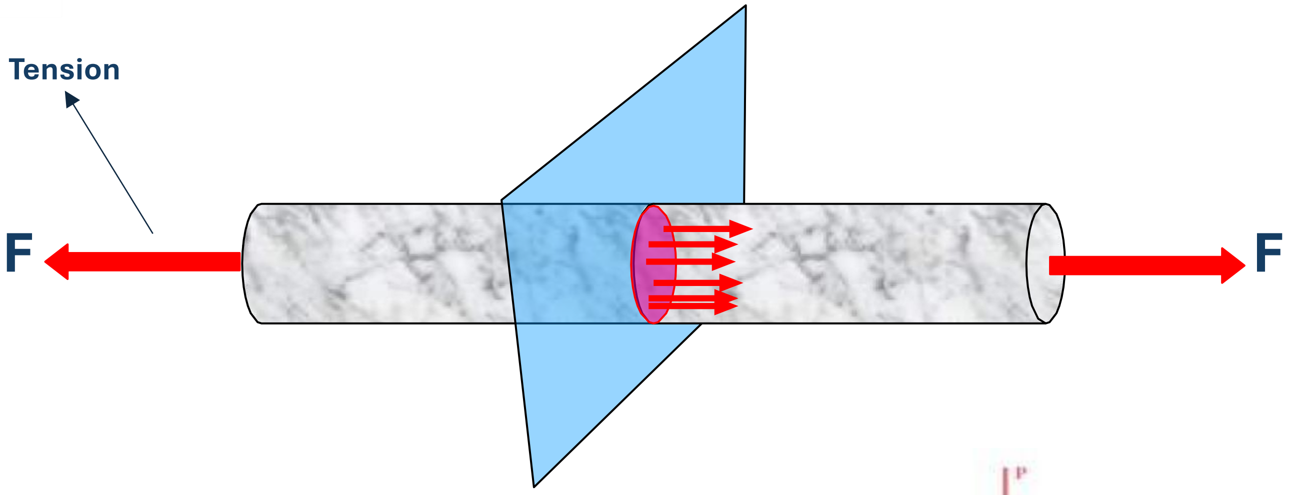
Mpa= N/mm^2

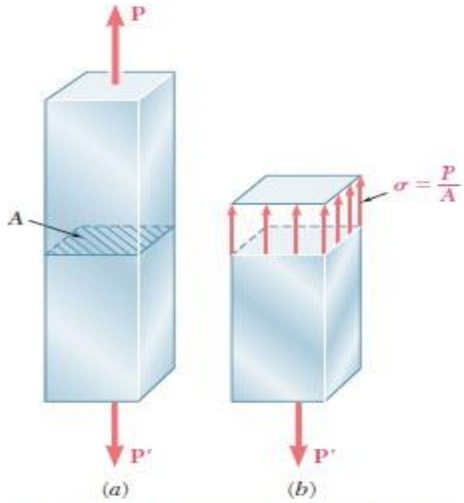
Gpa= $10^3 Mpa$

Sign Convention :

Tensile Stress : Positive 

Compressive Stress : Negative 





(a) Member with an axial load.
(b) Idealized uniform stress distribution at an arbitrary section.

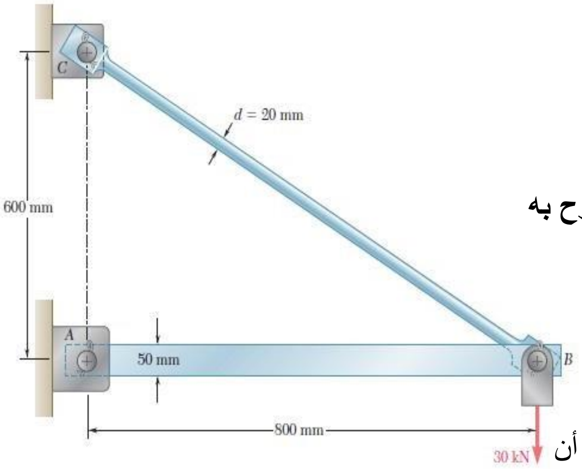
- Stress is distributed evenly only when the applied force passes through **the center** of the cross-section. This is called **centric loading**, and it happens in structural elements like **tension** and **compression** members.

- يتم توزيع الإجهاد بشكل متساوٍ فقط عندما تمر القوة المؤثرة عبر مركز المقطع العرضي. هذا يسمى التحميل المركزي، وهو شائع في العناصر الإنشائية مثل القضبان المشدودة والأعمدة المضغوطة.

Centric loading having resultant forces passing through the centroid of the section.

اللجنة الاكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civilittee-HU.com

EX1: Assume rod BC is made of steel with **maximum allowable stress σ_{all} =190 MPa. Can** rod BC safely support the load which it will be subjected ?
Knowing that **F_{BC} = 50 kN** , The diameter of the rod is **20 mm**



$$\sigma = \frac{p}{A} = \frac{p}{\pi r^2} = \frac{5000}{\pi\,(10^2)} = 159 \text{ Mpa}$$

بما أن ال

159< 190

OK ← Normal Stress < Allowable Stress

-لكي يكون التصميم آمناً، يجب أن يكون الإجهاد الطبيعي (σ) أقل من او يساوي الإجهاد المسموح به (σ_allowable)

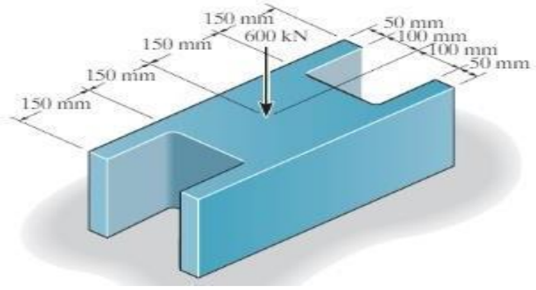
أي أن:

$\sigma \le \sigma$_allowable

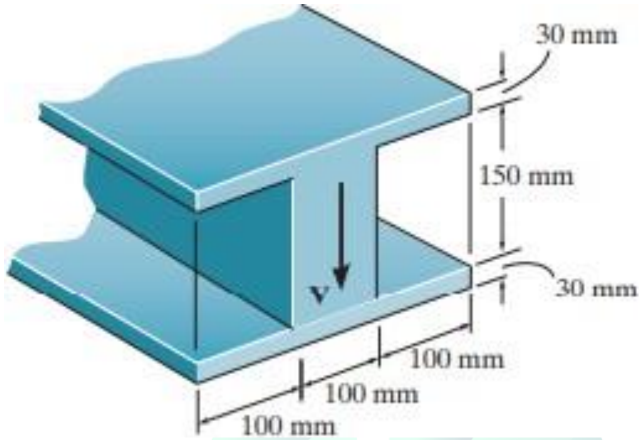
إذا كان الإجهاد الفعلي أكبر من المسموح به($\sigma > \sigma$_allowable) فإن المادة قد تفشل مما يعني أن التصميم غير أمن.

- لازم ندير بالنا واحنا بنحسب المساحة لأي شكل بكون عنا....

Find the Area of the following shapes:



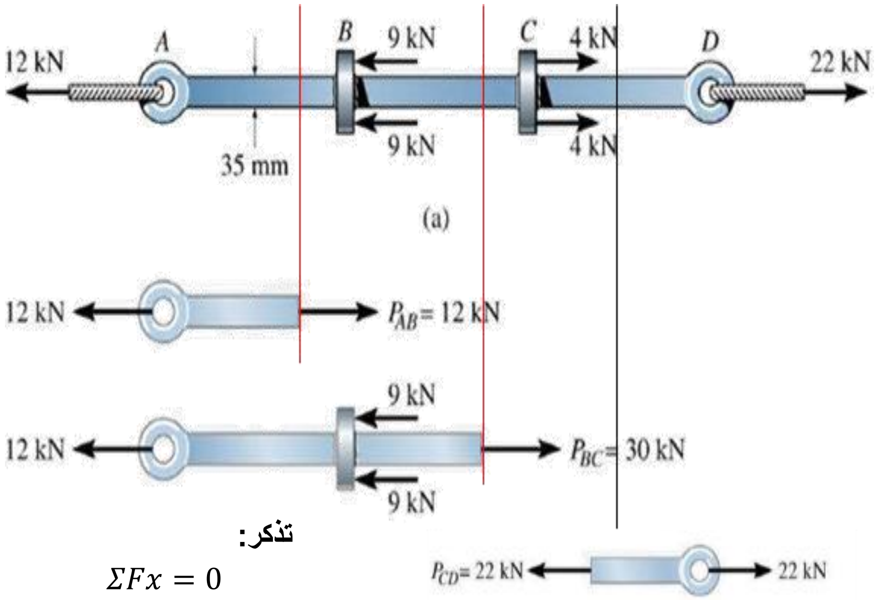
A = (300 * 600) – 2(200 * 150) = 12000 mm^2



A= (300*210) – 2(150*100) = 33000 mm^2

Civilittee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civilittee-HU.com

The bar has a constant **width of 40 mm** and a **thickness of 15** mm. determine **the maximum average normal stress** in the bar when it is subjected to the loading shown



مدام هو طالب ال**Max NS** بدي أخد أكبر**P** وهون هيي p_{BC}

$$\sigma = \frac{p}{A} = \frac{3000}{(40)(15)} = 50\ Mpa$$

-لاحظ هون انه الMax Stressعند AB

تذكر:

$\Sigma Fx = 0$

$\Sigma Fy = 0$

$\Sigma M = 0$

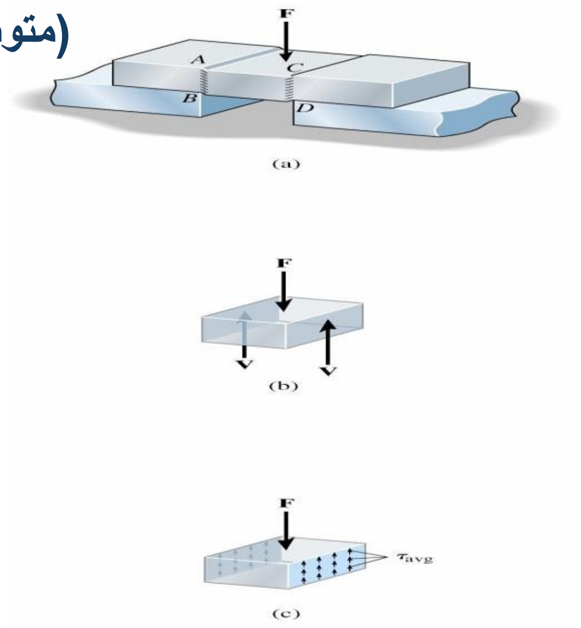
1.5 Average Shear Stress (متوسط الإجهاد القصي)

$$\tau = \frac{V}{A}$$

τ : Shear Stress ($\frac{N}{m^2}$)

V: Shear Force (N)

A: Cross sectional area (m^2)



Note:

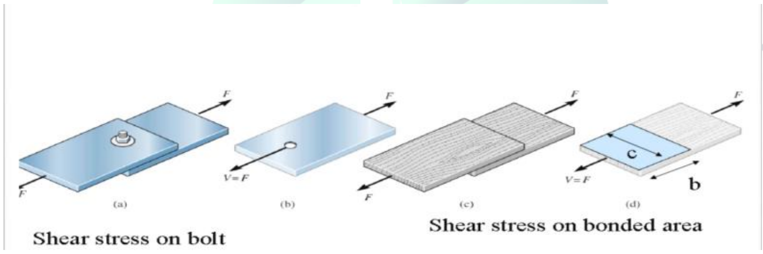
V: القوة العامودية على السطح

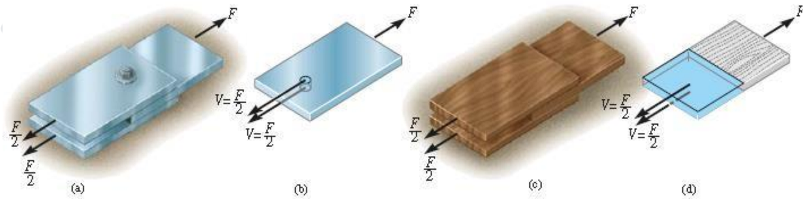
A: مساحة المقطع العرضي الذي يتعرض لقوة

عنا نوعين من ال Shear

Single Shear

Double Shear



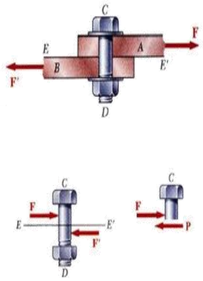


بنقدر نحكي هون إنه بكون عنا مساحة وحدة يعني بمعنى اخر القوة بتأثر على سطح واحد او مقطع عرضي واحد.

أما هون ف بكون عنا مساحتين يعني بمعنى اخر القوة بتأثر على مقطعين عرضيين.

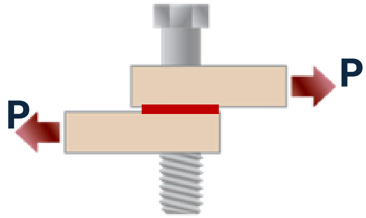
$$\tau = \frac{V}{(\pi)(r^2)}$$

حيث هي نصف قطر البرغي

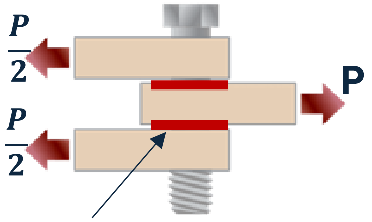


$$\tau = \frac{V}{bc}$$

حيث أن هي **مساحة منطقة التلامس** المعرضة للقوة القصية.

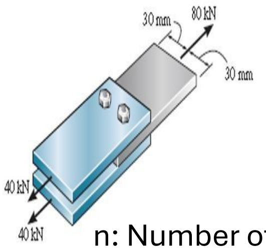


Single Shear → $\tau = V/A$



Double Shear → $\tau = \frac{V}{2A}$

شايف هون كيف مساحتين عندي تحت تأثير القوة



Note:

Double shear with two bolts

$$\tau = \frac{P}{2nA_{bolt}}$$

n: Number of bolts at the section

Punch Shear (إجهاد القص)

هو لما تحاول **تثقب** مادة (الحديد أو الخشب) باستخدام أداة، مثل مسمار أو مكبس. **الفكرة هي** إن القوة اللي بتطبقها بتخلي المادة تتقطع أو تنضغط حول المنطقة.

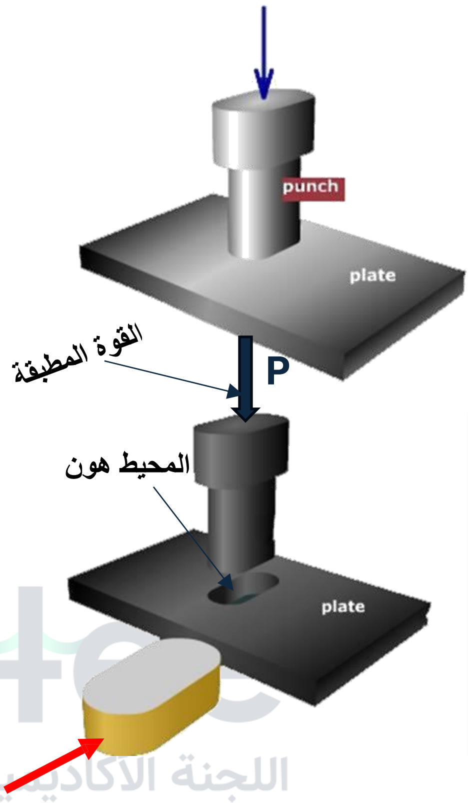
$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{P}{Ct}$$

τ : Punch Shear Stress $(\frac{N}{m^2})$

P : Punching Force → القوة المطبقة

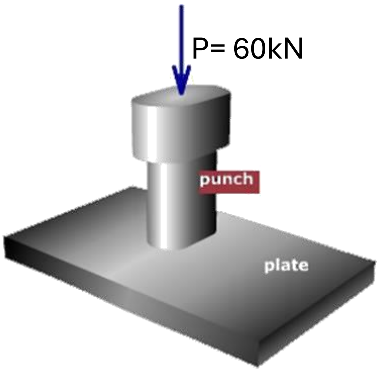
C : Circumference × Thickness

مساحة منطقة القص، والتي عادةً ما تكون **محيط الثقب** مضروبًا في **سماكة** المادة



اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية

EX: **Determine the diameter** of the largest circular hole that can be **punched** into a sheet of polystyrene **9mm thick,** knowing that the force exerted by the punch is **60kN** and that a **70 MPa average shearing stress** is required to cause the material to fail.



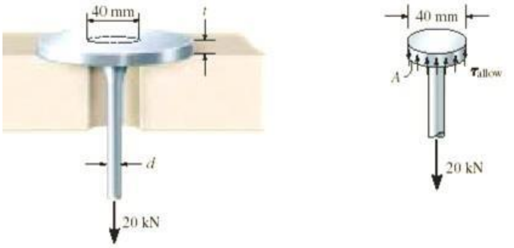
$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{60000}{2\pi r \times 9} = 70 \text{ Mpa}$$

$$r = \frac{60000}{2\pi \times 70 \times 9} = 15.1\text{mm} \longrightarrow d = 2r = 30.2mm$$

EX: If the rod passes **through a 40mm diameter** hole, **determine the minimum required diameter** of the rod and **the minimum thickness** of the disk needed to support **the 20 kN load**. The allowable **normal stress** for the rod is σ_{allow} **= 60 MPa**, and the allowable shear stress for the disk is τ_{allow} **=35 MPa.**

ركز هووون

و هووون



$$\sigma_{rod} = \frac{P}{A} = \frac{20000}{\pi r^2} = 60\ Mpa \rightarrow r = 10.3 \quad d = (10.3)(2) = 20.6$$

$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{20000}{2\pi(20)t} = 35\ Mpa \rightarrow t = 4.6mm$$

Bearing Stress (إجهاد التحمل)

هو الإجهاد الذي يتولد عند **منطقة التلامس** بين جسمين، بسبب **قوة عمودية على السطح**. يتم توزيعه على المساحة **التي يتلامس فيها** الجسمان .

هاي جددددا مهمة

$$\sigma_b = \frac{P}{A} = \frac{P}{dt}$$

σ_b: Bearing Stress (إجهاد التحمل) ($\frac{N}{m^2}$)

P: القوة **العمودية** المؤثرة (Applied Load)

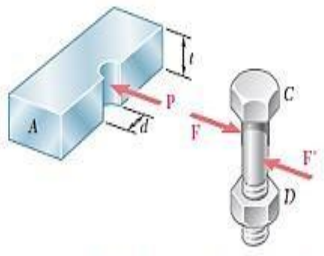
A_b: مساحة **التلامس** بين الأجسام (Bearing)

إذا كان لدينا **مسامير أو براغي** في لوح معدني

Ab= قطر المسمارأو البرغي(d)× سماكة اللوح(t)

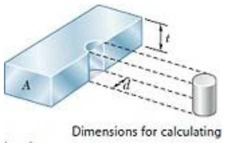
-عند التلامس هاي نقطة جددا مهمة ...في بعض الأسئلة بكون معطيك أكثر من t هون في هاي الحالةرح نعتمد السماكة عند **أول تلامس.**

-أيضا في المساحة **لا ننسى** أن نضرب في **عدد البراغي.**



Equal and opposite forces between plate and bolt, exerted over bearing surfaces.

$$A = \frac{P}{(\sigma_b)_{allowable}}$$



Dimensions for calculating bearing stress area.

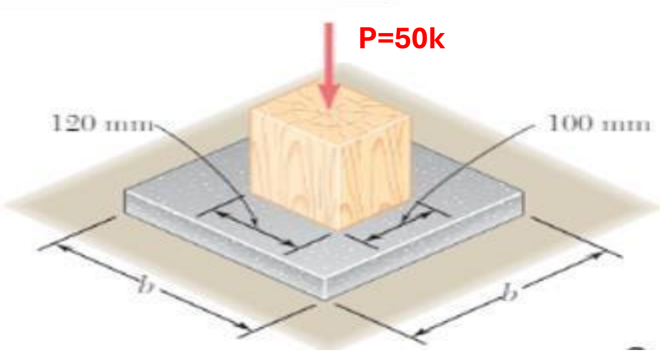
where $(\sigma_b)_{allowable}$ is the allowable bearing stress of the weaker material

$allowable\ (\sigma_b)$: هو **أقصى** قيمة لإجهاد التحمل التي يمكن للمادة تحملها **دون فشل.** يُستخدم هذا الحد المسموح به لتصميم الوصلات (مثل البراغي، والمسامير، والمفاصل) لضمان أن المواد المستخدمة **لا تتعرض** للإجهاد المفرط الذي يؤدي إلى فشلها.

يُقصد بها **المادة الأضعف** في الاتصال (مثل المعدن الأضعف بين البرغي والمادة المرتبطة به). بمعنى أن المادة الأضعف **ستتحمل أقل إجهاد** قبل أن تبدأ بالتشوه أو الفشل.

EX: **A 50kN** axial load is applied to a short wooden post that is supported by a concrete footing resting on undisturbed soil. Determine:

1) The **maximum bearing stress** on the concrete footing.
2) **the size** of the footing for which **the average bearing stress** in the soil is **160 kPa.**

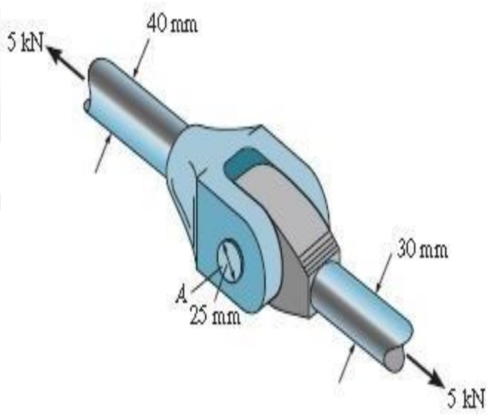


$$1)\ \sigma_b = \frac{P}{A_b} = \frac{50000}{(120)(100)} = 4.165\ \text{Mpa}$$

$$2)\ \sigma_b = \frac{P}{A_b} = \frac{50000}{A} = \frac{160}{1000}\ Mpa$$

$$A = 312.50 \times 10^3\ mm^2$$

EX: Determine the average normal stress in each rod and the average shear stress in the pin A.



$$\sigma_{rod1} = \frac{P}{A} = \frac{5000}{\pi \times (20^2)} = 4Mpa$$

$$\sigma_{rod2} = \frac{P}{A} = \frac{5000}{\pi \times (15^2)} = 7.1Mpa$$

نلاحظ هنا أن Pin A في حالة Double shear
ومنه رح يكون عنا مساحتين...

$$\tau_A = \frac{P}{2A} = \frac{5000}{2\ (\pi)(12.5^2)} = 5.1\ Mpa$$

1.6 Allowable stress (الإجهاد المسموح به)

$$P_u \longrightarrow \sigma_U = \frac{P_u}{A}$$

$$P_u \longrightarrow \tau_U = \frac{P_u}{A}$$

σ_U: **Ultimate** stress (الإجهاد النهائي العادي)

τ_U: **Ultimate** Shear (الإجهاد النهائي القصي)

P_u: **Ultimate** Load (الحمل النهائي)

يُطلق على أكبر قوة يمكن تحملها اسم **الحمل النهائي** (**Ultimate** Load)

الإجهاد النهائي هو القدرة القصوى للمادة على تحمل القوى الخارجية قبل أن تنهار. يُحسب هذا الإجهاد بقسمة **الحمل النهائي** (أكبر قوة يمكن أن تتحملها المادة) على **مساحة المقطع العرضي الأصلية.**

نستخدم الإجهاد النهائي لتحديد **الإجهاد المسموح به**، وهو جزء من الإجهاد النهائي، باستخدام معاملات أمان (Safety Factors).

Factor of Safety (معامل الأمان)

هو **نسبة الأمان** التي يتم تصميم الهيكل بناءً عليها لضمان تجنّب الفشل. يُستخدم لتحديد الإجهاد أو الحمل المسموح به مقارنة بالإجهاد أو الحمل النهائي.

$$\text{Factor of safety} = F.S = \frac{Ulitmate\ Load}{Allowable\ Load}$$

$$\text{Factor of safety} = F.S = \frac{Ulitmate\ stress}{Allowable\ stress}$$

$$P_{allow} = \sigma_{allow}\, A$$

عوامل تُأخذ بالاعتبار عند التصميم:

الوظيفة (Functionality)

القوة (Strength)

الشكل الخارجي (Appearance)

الاقتصاد (Economics)

حماية البيئة (Environmental Protection)

Note:

The factor of safety **must be greater than one** to avoid failure

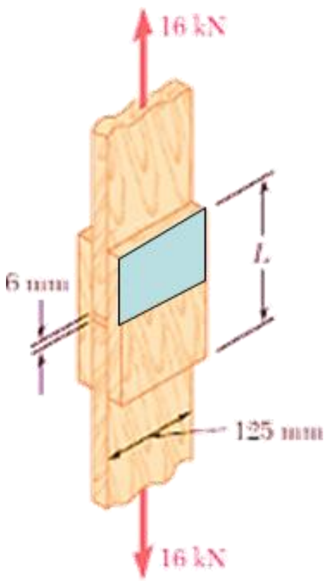
ملاحظات مهمة:

-**عامل الأمان يجب أن يكون أكبر من 1** لتجنب الفشل

-إذا كان عامل الأمان **صغيرًا جدًا**، فإن الهيكل قد يتعرض للفشل بسهولة

-إذا كان عامل الأمان **كبيرًا جدًا**، فإن التصميم يصبح مكلفًا وغير اقتصادي

Two wooden members are joined by plywood splice plates that are fully glued on the contact surfaces. Knowing that the clearance between the ends of the members is 6 mm and that the ultimate shearing stress in the glued joint is 2.5 MPa, determine the length L for which the factor of safety is 2.75 for the loading shown.



قبل ما نحل ..... بدنا نلاحظ انه بالسؤال معطيني **F.S+Ultimate shear** لازم ننتبه ونجيب ال **Allowable shear**

بعدين نبلش حل...

$$\tau_{allowable} = \frac{\tau_{ultimate}}{F.S} = \frac{2.5}{2.75} = 0.909\ Mpa$$

Note: Double Shear...

$$\tau = \frac{P}{2A} = \frac{16000}{2(125)((L-6)/2)} = 0.909$$

L= 146.8 mm

طريقة حل ثانية....أسهل

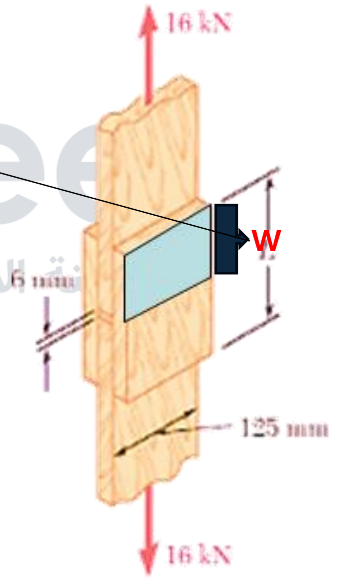
بنقدر نفرض إنه **L= 2w+6**

و نحسب w

$$\tau_{all} = \frac{P}{A} = 0.909 = \frac{16000}{(2)(125)(w)}$$

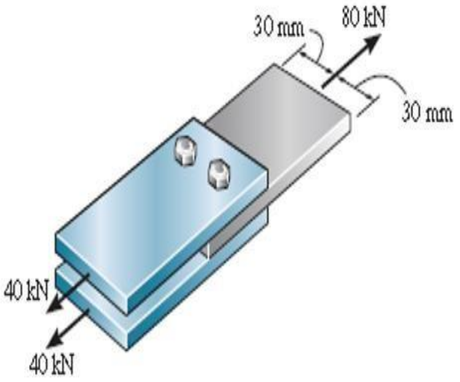
$$w = 70.4$$

$$L = 2(70.4) + 6 = 146.8mm$$



Civilittee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية

The joint is fastened together using **two bolts**.
Determine **the required diameter** of allowable shear stress **for the bolts** is **110 MPa** Assume each bolt supports an equal portion of the load.



Double shear with two bolts

n= number of bolts at the section

$$\tau = \frac{P}{2nA_{bolt}} = 110 = \frac{80000}{2A \times 2}$$

$$A_{bolt} = 181.82\ mm^2$$

$$181.82 = \pi\frac{d^4}{4}$$

$$d = 15.22\ mm$$

طريقة حل ثانية....بدون كل هالتعقيد

-إنه عندي برغيين **وكل برغي بعمل دبل شير** يعني عندي 4 مساحات.

$$\sigma_{allow} = \frac{P}{A}$$

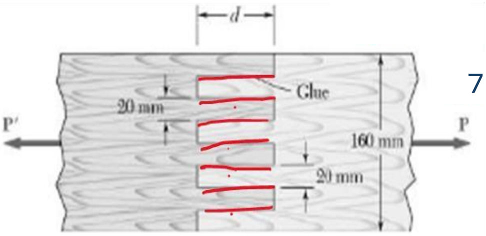
$$110 = \frac{80000}{(4)(\pi)(r^2)}$$

$$r \approx 7.61$$

$$d = 2r = 15.22mm$$

EX: Two wooden planks, each **20 mm thick** and **160 mm wide** are joined by the glue. The joint will fail when the average **shearing** in the glue reaches **820 kPa**, determine the **smallest allowable length d** of the cuts, if **P= 7.6 kN**.

-نلاحظ هنا المطلوب أقل طول مسموح به ...وأنه هنا أيضا لدينا أكثر من مساحة واحدة.



$$\tau = \frac{P}{A}$$

$$\tau = \frac{P}{7A} = \frac{(7.6)(10^3)}{(7)(d)(20)} = \frac{820}{1000}$$

$$d = 66.2mm$$

EX: **Three steel bolts** are to be used to attach the steel plate shown to a wooden beam **Ultimate shear stress = 360 MPa** and **factor of safety = 3.35** . Determine the **diameter of the bolts.**

$$\tau_{allow} = \frac{\tau_{ultimate}}{f.s} = \frac{360}{3.35} = 107.46\ Mpa$$

-عندي 3 براغي وكل برغي عامل

Single Shearيعني عندي 3 مساحات

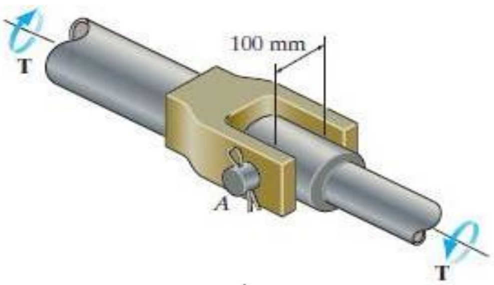
$$\tau_{all} = \frac{P}{3A} = \frac{(110)(10^3)}{(3)\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)} = 107.46$$

$$d = 20.8mm$$

www.Civilittee-HU.

EX: The joint is used to transmit a torque of **T=3kN.m.** Determine the required minimum diameter of the shear pin *A* if it is made from a material having a shear **failure stress of 150 MPa**. Apply **a factor of safety of 3** against failure.

$$\tau_{fail} = \tau_{ultimate} = 150\ Mpa$$



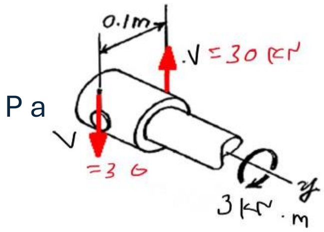
$$\sum M = 0\,, \qquad 0.1v = 3$$

$$v = 30kN.m$$

$$\tau_{all} = \frac{\tau_u}{f.s} = \frac{150}{3} = 50\ Mpa$$

$$\tau_{all} = \frac{v}{A_{pin}} = \frac{30000}{(\pi)\left(\frac{d^2}{4}\right)} = 50$$

$$d = 27.65mm$$



Design for Axial Loads and Direct Shear

- **Analysis:** Given the structure and loads, determine stresses and strains.

عند معرفة الهيكل والأحمال، يتم تحديد الإجهادات والانفعالات

- **Design:** Given the loads and allowable stresses, determine the properties of the structure.

عند معرفة الأحمال والإجهادات المسموح بها، يتم تحديد خصائص الهيكل

- **Main equation:**

$$Required\ Area = \frac{Load\ to\ be\ transmitted}{Allowable\ stress}$$

- **Other design considerations:**

Stiffness: Designing the structure to resist changes in shape.

تصميم الهيكل لمقاومة التغيرات في الشكل

Stability: Designing the structure to resist buckling under compressive loads.

تصميم الهيكل لمقاومة الانبعاج تحت الأحمال الانضغاطية

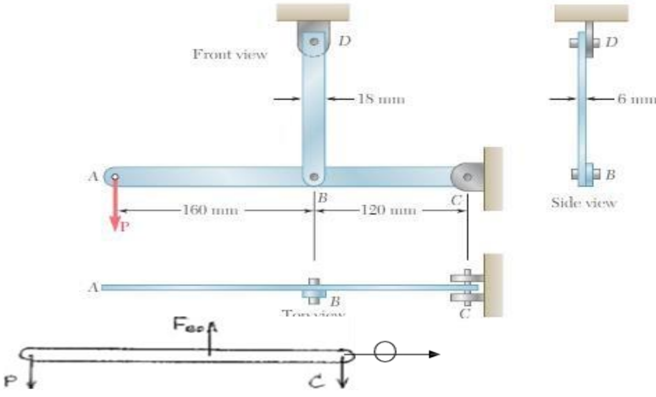
Optimization: Designing the best structure to meet a particular goal.

تصميم الهيكل بأفضل طريقة لتحقيق الهدف المطلوب

Civilittee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civilittee-HU.com

In the steel structure shown, a **6 mm** diameter pin is used at <u>C and A</u> **10 mm diameter** pin is used at <u>B and D</u>. **The ultimate shear stress = 150 MPa . The ultimate normal stress= 400 MPa** <u>in link BD</u>. **The factor of safety =3**. Determines **<u>the largest load P</u>** that can be applied at A.

مهم بس يقلنا هيك .... بدنا نحسب كل ال P اللي ممكن يطلعوا معنا وبناخد أصغرP



$$\sigma_{all} = \frac{400}{3} = 133.33Mpa$$

$$\tau_{all} = \frac{150}{3} = 50\ Mpa$$

$$\frac{\frac{7p}{3}}{(18-10)(6)} = 133.33\ , \boldsymbol{p = 2.74N}$$

$$Bor\ D\quad \frac{\frac{7p}{3}}{(\pi)(5^2)} = 50\ , \boldsymbol{p = 1.683N}\ (\boldsymbol{the\ smaller\ one\ controls})$$

$$\tau_C(double\ shear) = \frac{4P/3}{(2)(\pi)(3^2)} = 50\ , \boldsymbol{P = 2.12N}$$

$$\curvearrowleft \Sigma M_C = 0: \quad 0.280P - 0.120F_{BD} = 0$$

$$P = \frac{3}{7}F_{BD}$$

$$\curvearrowleft \Sigma M_B = 0: \quad 0.160P - 0.120C = 0$$

Chapter 2

Strain

2.1 Deformation

- When a force is applied to a body, it tends to change its shape and size. **This change is known as deformation**, which occurs due to the influence of external forces on the body. Deformation can be temporary, where the body returns to its original shape once the force is removed (as seen in **elastic materials**), or permanent if the force exceeds the material's elasticity limit, causing a lasting change in shape or size

عندما يتم تطبيق قوة على جسم ما، فإنه يميل إلى تغيير شكله وحجمه. يُعرف هذا التغيير باسم **التشوه**، وهو يحدث نتيجة تأثير القوة الخارجية على الجسم. يمكن أن يكون التشوه مؤقتًا، حيث يعود الجسم إلى شكله الأصلي بعد زوال القوة (مثل **المواد المرنة**)، أو دائمًا إذا تجاوزت القوة حد المرونة للمادة، مما يؤدي إلى تغيير دائم في الشكل أو الحجم.

2.2 Strain

$$Normal\ Strain\ (\varepsilon) = \frac{\delta}{L} = \frac{\Delta L}{L}$$

الإجهاد الطولي وهو مقياس للتغير النسبي في طول الجسم عند تعرضه لقوة شد أو ضغط.

δ=ΔL=change in lenght

مقدار التغير في طول الجسم نتيجة تطبيق القوة (الطول النهائي ناقص الطول الأصلي)

L= original lenght

الطول الأصلي للجسم قبل تطبيق القوة

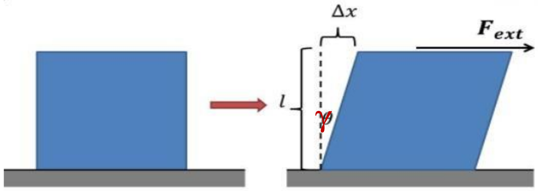
$$Shear\ Strain\ (\gamma) = \frac{\Delta_x}{I} = tan^{-1}(\theta)$$

الإجهاد القصّي، وهو مقدار التشوه الزاوي الناتج عن القوة القصية

Δx=مقدار الإزاحة الأفقية للطبقة العلوية من الجسم بسبب القوة المؤثرة

I = الطول الأصلي للجسم أو المسافة العمودية بين الطبقتين قبل التشوه

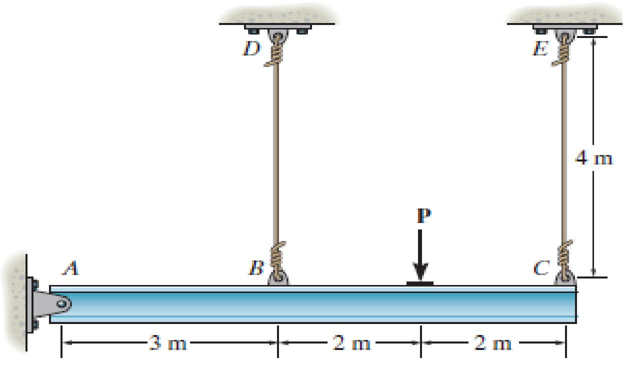
θ = الزاوية الناتجة عن التشوه (زاوية الانحراف)، وعندما تكون صغيرة (radian)



اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civilittee-HU.com

EX: The rigid beam is supported by a pin at *A* and wires *BD* and *CE*. If the load **P** on the beam causes the end *C* to be **displaced 10 mm downward**, determine the normal strain developed in wires *CE* and *BD*.

دليل على التشوه

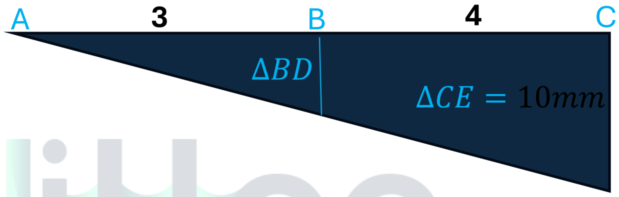


$$\frac{\Delta L_{BD}}{3} = \frac{\Delta L_{CE}}{7}$$ تشابه مثلثات

$$\Delta L_{BD} = \frac{3\,(10)}{7} = 4.286\ \text{mm}$$

$$\varepsilon_{CE} = \frac{\Delta L_{CE}}{L} = \frac{10}{4000} = 0.00250\ \text{mm/mm}$$

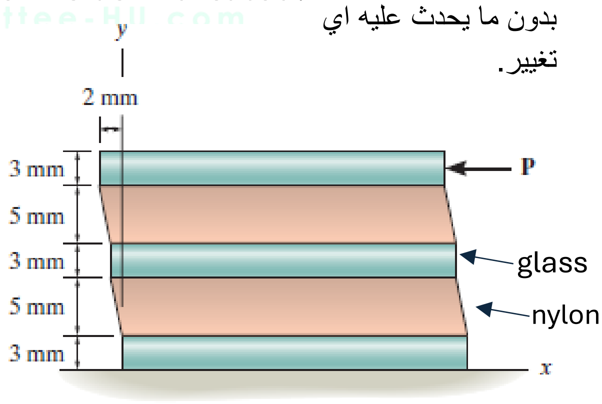
$$\varepsilon_{BD} = \frac{\Delta L_{BD}}{L} = \frac{4.286}{4000} = 0.00107\ \text{mm/mm}$$



Civilittee
www.Civilittee-HU.com

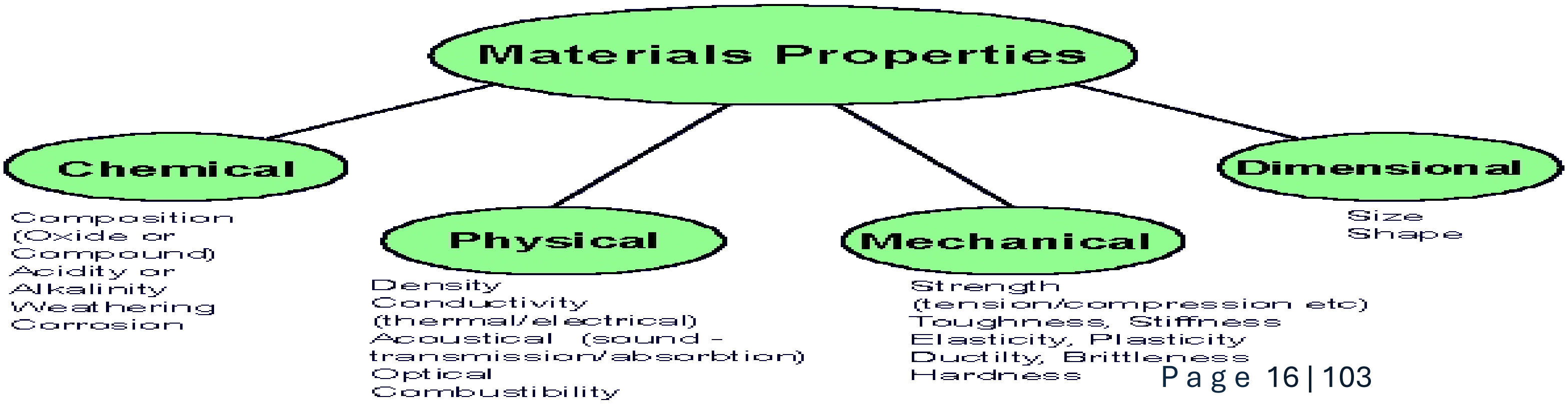
EX: Nylon strips are fused to glass plates. When moderately heated the nylon will become soft while the glass stays approximately rigid. Determine the average shear strain in the nylon due to the load **P** when the assembly deforms as indicated.

يعني الزجاج رح يضل بدون ما يحدث عليه اي تغيير.



$$\gamma = \tan^{-1}\left({}^{2}/_{10}\right) = 11.31^\circ$$

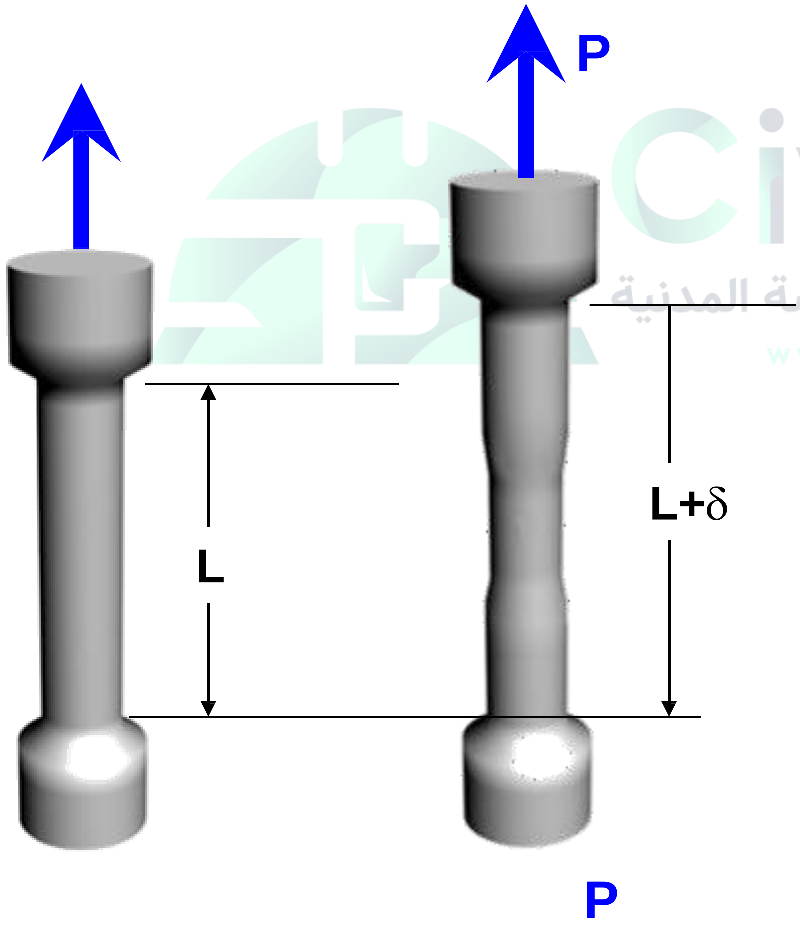
$$\gamma = \tan^{-1}\left({}^{2}/_{10}\right) = 0.197\ rad$$



CHAPTER 3

Mechanical properties of materials

3.1 The tension and compression test



$$Stress: \sigma = \frac{P}{A}$$

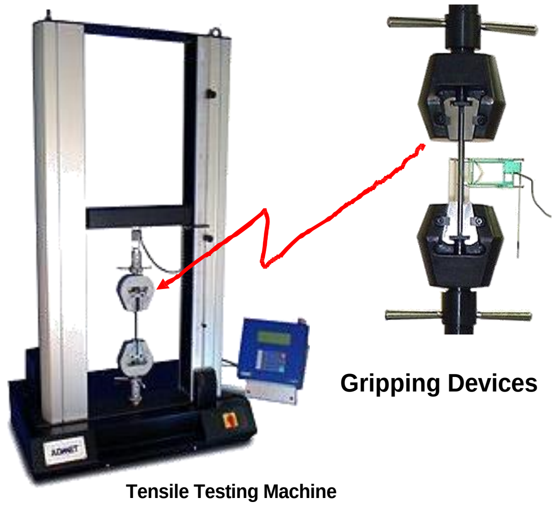
$$Strain: \varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

When plotting stress against strain, the resulting curve is called the **stress-strain diagram**. This curve represents the material's properties but **does not depend on the dimensions** of the specimen used in the test; it only **depends on the nature of the material itself.**

عند رسم العلاقة بين الإجهاد والانفعال، نحصل على منحنى يُعرف بمنحنى الإجهاد-الانفعال. هذا المنحنى **يعبر عن خصائص المادة**، لكنه **لا يعتمد على أبعاد العينة** المستخدمة في الاختبار، بل **يعتمد فقط على طبيعة المادة نفسها**.

اختبار الشد (Tensile Testing)

اختبار الشد هو أحد الاختبارات الميكانيكية الأساسية التي تُستخدم لتحديد خصائص المواد. يتم ذلك عبر إمساك طرفي العينة باستخدام **أجهزة التثبيت في آلة اختبار الشد** ثم تطبيق حمل أحادي المحور متزايد باستمرار حتى تفشل العينة.


Gripping Devices

Tensile Testing Machine

Tensile tests are performed by securing the ends of a properly prepared standardized specimen in a tensile testing machine and gradually applying an increasing uniaxial load until the material fails.

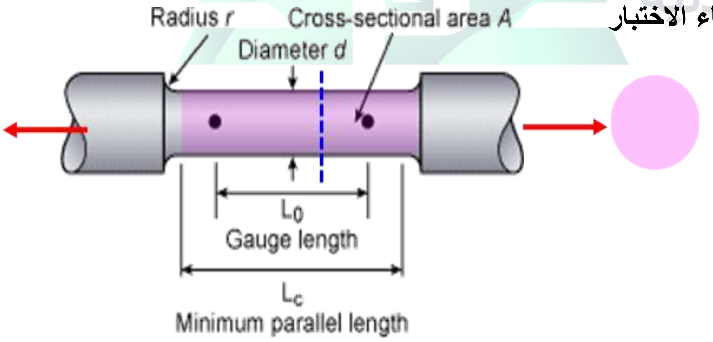
عينة اختبار الشد (Tensile Test Specimen)

Civiltfee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civiliftee-HU.com

يتم إعداد العينة بأبعاد قياسية لضمان دقة النتائج

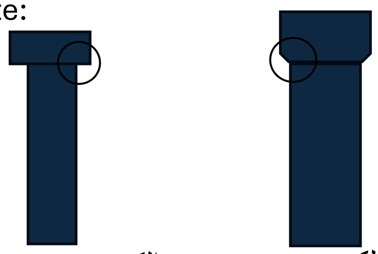
يمكن أن يكون المقطع العرضي دائريًا أو مربعًا، كما هو موضح في الأشكال

يتم تحديد طول القياس (Gauge Length L_0) وهو الجزء الذي يُقاس عليه الانفعال أثناء الاختبار



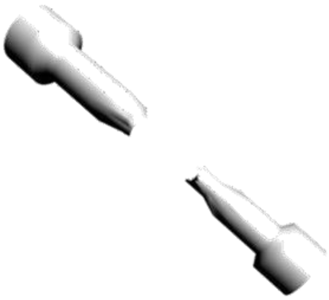
(a) Round cross section

Note:

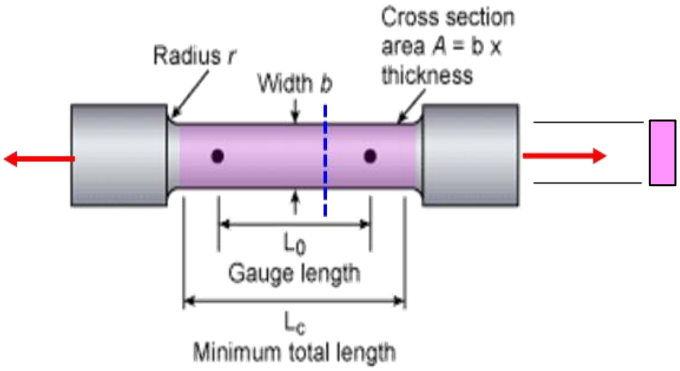


الكسر هون عند نقطة التثبيت

الكسر هون بالنص



- المكان الصحيح للكسر في اختبار الشد عند إجراء اختبار الشد، يجب أن يحدث الكسر في **منتصف العينة** وليس عند نقاط التثبيت. إذا حدث الكسر في مناطق التثبيت، فهذا يشير إلى أن الاختبار لم يكن دقيقًا، وربما تأثرت العينة بسبب **عدم التثبيت الصحيح أو الاحتكاك مع الماسكات.**



(b) Square cross section

3.2 Stress- Strain Diagram

σ = normal stress on a plane perpendicular to the longitudinal axis of the specimen

P = applied load

A = original cross sectional area

ε = normal strain in the longitudinal direction

δ = change in the specimen's gage length

L = original gage length

$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad \varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

- **Engineering stress**

  $\sigma = P/A_0$

- **True stress**

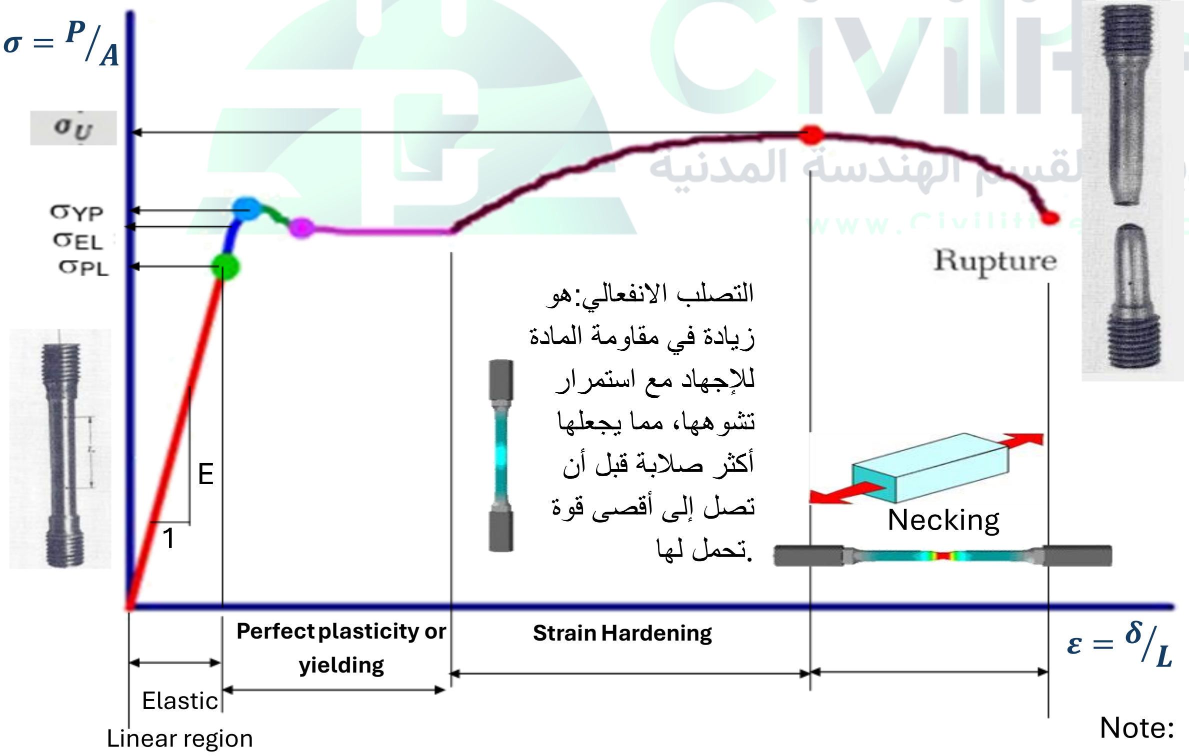
  $\sigma = P/A$

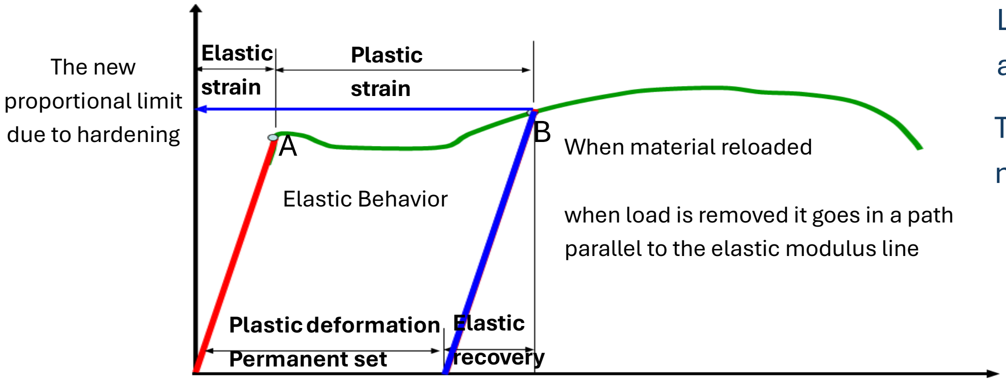
- **Engineering strain**

  $\varepsilon = (l - l_0)/l_0$

- **Volume must be the same** $Al = A_0 l_0$

stress-strain curve or diagram gives a direct indication of the material properties.





Note:

Linear relationship between stress and strain.

The slop of this is called elastic modulus. في الجزء الخطي من منحنى الإجهاد والانفعال معامل المرونة هو **الميل**

E Modulus of Elasticity (Young's Modulus) : Slope of the initial linear portion of the stress-strain diagram. The modulus of elasticity may also be characterized as the "stiffness" or ability of a material to resist deformation within the linear range.

معامل المرونة هو ميل الجزء الخطي الأول من منحنى الإجهاد والانفعال، ويعبر عن **مقاومة المادة للتشوه** كلما زاد، كانت المادة **أكثر صلابة** وأقل قابلية للتمدد

Proportional limit : is the maximum value of the stress from the stress-strain diagram, where the stress and strain are proportional .

هو **أقصى قيمة للإجهاد** في منحنى الإجهاد والانفعال حيث يكون الإجهاد والانفعال متناسبين (أي أن العلاقة بينهما تظل خطية). بعد هذه النقطة، تبدأ المادة في التشوه بشكل غير خطي، مما يعني أنها لم تعد تتبع قانون هوك.

Elastic Limit : is the maximum stress for a material to behave elastically, - the specimen will return to its original undeformed shape if the load is removed so long as the stress is below the elastic limit.

هو **أقصى إجهاد يمكن أن تتحمله المادة مع بقائها في الحالة المرنة** أي أنه إذا كان الإجهاد أقل من هذا الحد، فستعود المادة إلى شكلها الأصلي بعد إزالة الحمل. أما إذا تجاوزته، فستبدأ المادة في التشوه الدائم ولن تعود لشكلها الأصلي

Yield Point: This defined as the maximum stress on stress-strain curve, where there is an appreciable increase in strain with no increase in stress. It is generally easier to determine than the proportional limit or elastic.

هي **القيمة القصوى للإجهاد** في منحنى الإجهاد والانفعال، حيث يحدث **زيادة ملحوظة في الانفعال دون زيادة في الإجهاد** بمعنى آخر، تبدأ المادة في التشوه الدائم دون الحاجة لزيادة الحمل. وهي أسهل في التحديد مقارنة بحد التناسب أو حد المرونة.

Yield Strength : It is the stress which induces a specified permanent set. This is useful for materials which have no well defined yield point. The offset method is generally used to determine yield stress.

هي **الإجهاد الذي يسبب تشوهًا دائمًا محددًا في** المادة تُستخدم هذه القيمة عندما لا يكون للمادة نقطة خضوع واضحة. لتحديدها، يتم استخدام طريقة **الإزاحة** حيث يتم رسم خط موازٍ للجزء الخطي من المنحنى ويقطع المنحنى عند نقطة الخضوع التقريبية.

Tensile strength: the maximum stress applied to the specimen.

هي **أقصى إجهاد** يمكن تطبيقه على العينة قبل أن تبدأ في الانكسار تمثل هذه النقطة أعلى قيمة للإجهاد في منحنى الإجهاد والانفعال، وبعدها تبدأ المادة في الضعف قبل الفشل النهائي.

Failure stress: the stress applied to the specimen at failure (usually less than the maximum tensile strength because necking reduces the cross- sectional area).

هو الإجهاد المطبق على العينة **<u>عند لحظة الكسر</u>** وعادةً ما يكون أقل من مقاومة الشد القصوى، لأن التضيق **<u>(Necking)</u> يقلل من مساحة المقطع العرضي للمادة، مما يؤدي إلى الكسر.**

Ductility: It is the ability of a material to deform plastically.

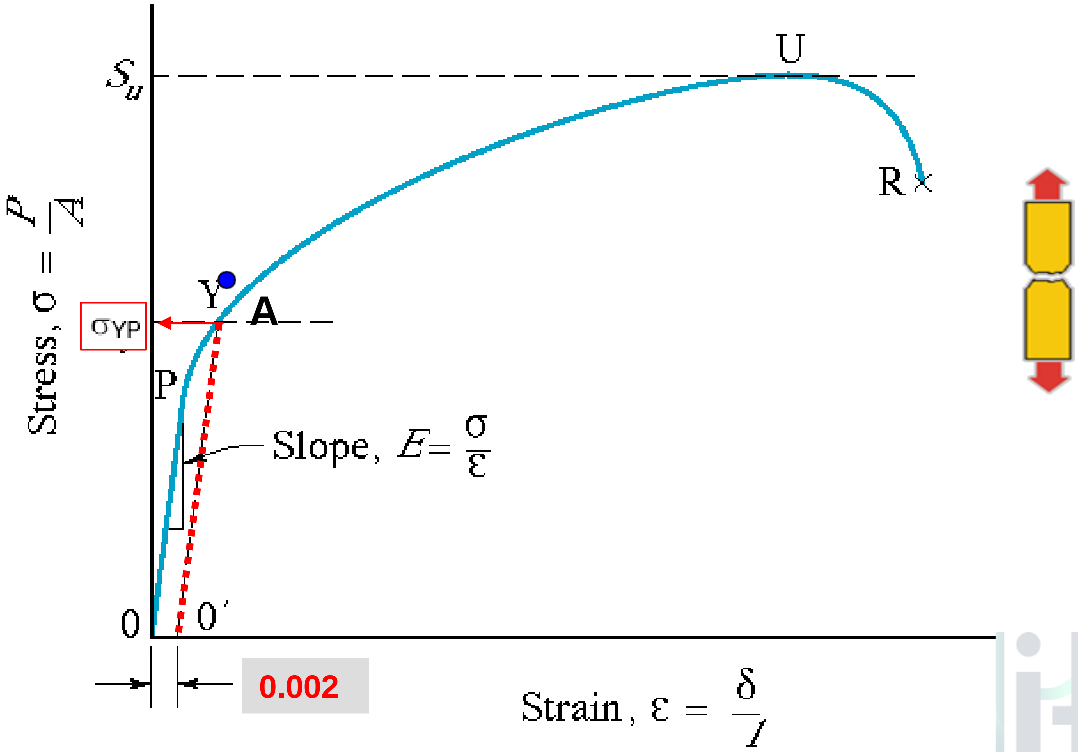
هي قدرة المادة على التشوه بشكل لدن (**دون أن تنكسر**)

Percent (%) elongation of the member = $(L_f - L_0) / (L_0) * 100.0$

Percent (%) reduction in area at the location of fracture

% Area = $(A_0 - A_f) / (A_0) * 100.0$

3.3 the stress and strain diagram for ductile and brittle materials



The yield point may be determined by the **offset method** .

A line is drawn on the stress- strain diagram parallel to the initial linear part of the curve but is offset by some standard amount of strain, such as **0.002 or 0.2%.**

The intersection of the offset line and the stress-strain curve (point A in the figure) defines the yield stress.

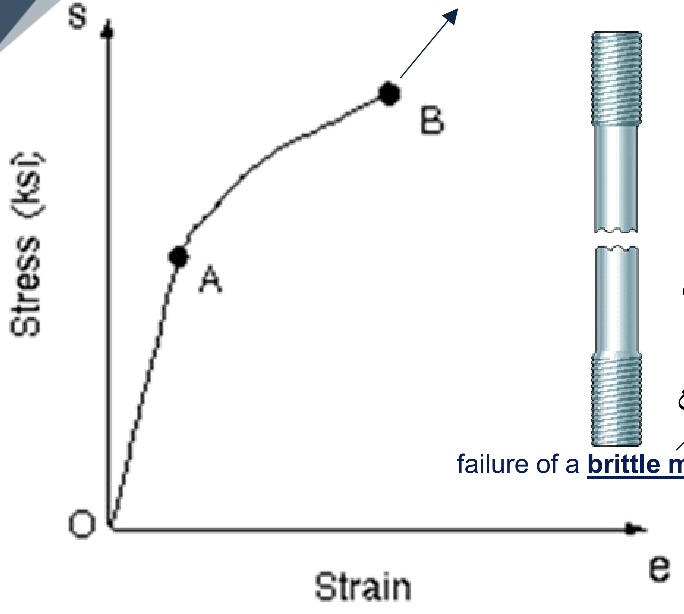
تحديد نقطة الخضوع باستخدام طريقة الإزاحة **(Offset Method)**

-يتم رسم خط موازٍ للجزء الخطي الأول من منحنى الإجهاد والانفعال، لكن **مع إزاحة صغيرة** بمقدار**0.002&0.2%**من الانفعال.

-تقاطع هذا الخط مع منحنى الإجهاد والانفعال (النقطة A في الشكل) يمثل **إجهاد الخضوع(Yield Stress).**

-معامل المرونة $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ هو ميل الجزء الخطي من المنحنى ويعبر عن **مقاومة المادة للتشوه المرن**

إجهاد الفشل (النقطة B) يساوي تقريبًا إجهاد الشد الأقصى(Ultimate Stress)

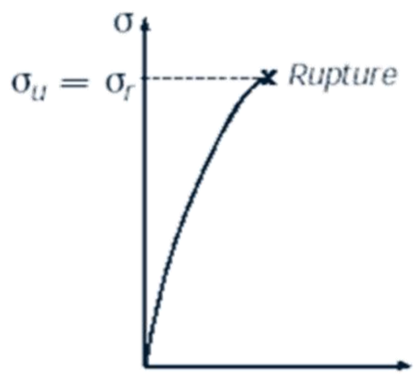


هي المواد التي **تفشل (تتكسر) عند إجهاد شد منخفض نسبيًا** وبانفعال قليل جدًا بعد تجاوز **حد التناسب (النقطة A)** أي أنها لا تخضع لتشوه

failure of a **brittle material**

Stress –strain diagram for a brittle material

Ordinary glass is a nearly ideal brittle material, because it exhibits almost no ductility whatsoever

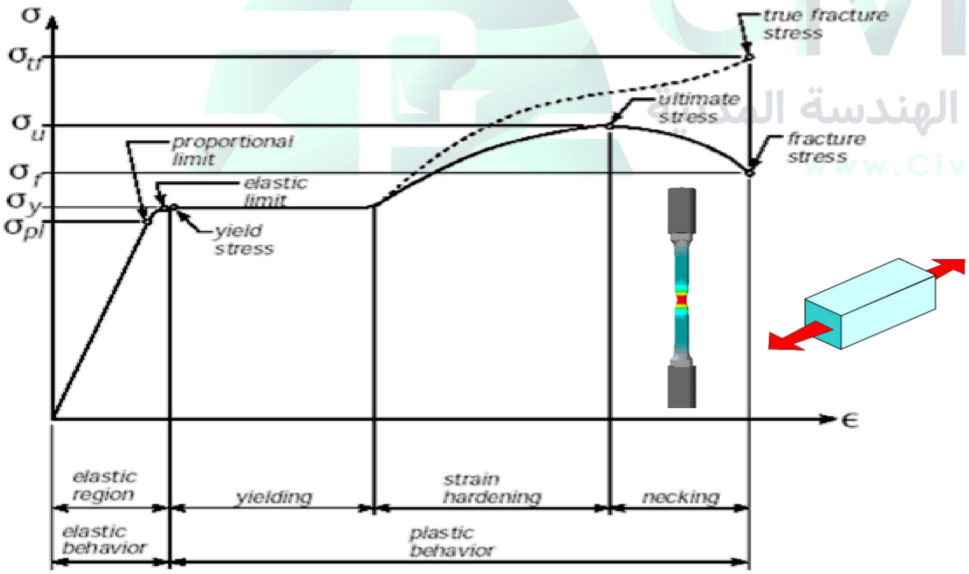


الزجاج العادي هو مادة هشة تقريبًا بشكل مثالي.

لا يمتلك أي ليونة أو قدرة على التشوه قبل الكسر.

عند تعرضه للإجهاد، ينكسر مباشرة دون حدوث .

Materials that fail in tension at relatively low values of strain are classified **as brittle materials.** Examples are **concrete, stone, cast iron, glass, ceramic materials, and many common metallic alloys**. These materials fail with only little elongation after the proportional limit (point A) is exceeded, and the fracture stress (point B) is the same as the ultimate stress



The true-stress vs. true-strain curve is a plot of the stress in the sample at its minimum diameter, after necking has begun, vs the local elongation.

منحنى الإجهاد الحقيقي مقابل الانفعال الحقيقي

هو رسم بياني **يوضح العلاقة بين الإجهاد الحقيقي والانفعال الحقيقي**، حيث يتم قياس الإجهاد بناءً على **أصغر قطر للعينة بعد بدء التضيق ويتم حساب الانفعال وفقًا للتمدد المحلي الفعلي**

الفرق بين الإجهاد والانفعال الحقيقي والمقاس

- الإجهاد المقاس (Engineering Stress): يحسب بناءً على المساحة الأصلية للعينة.
- الإجهاد الحقيقي (True Stress): يحسب باستخدام المساحة الفعلية المتغيرة أثناء التحميل، وخاصة بعد حدوث التضيق.
- الانفعال المقاس (Engineering Strain): يعتمد على التغير في الطول مقارنة بالطول الأصلي.
- الانفعال الحقيقي (True Strain): يأخذ في الاعتبار التغير التدريجي في الطول أثناء التحميل، وهو أكثر دقة.

This more accurately reflects the physical processes happening in the material, but is much more difficult to measure than the engineering stress and strain, which divide the applied load by the original cross-sectional area, and the total elongation by the original length.

لماذا يعتبر منحنى الإجهاد الحقيقي مقابل الانفعال الحقيقي أكثر دقة؟

لأنه يعكس **السلوك الفعلي للمادة** أثناء التشوه، خاصة بعد حدوث التضيق. ✅

يتم حساب الإجهاد الحقيقي بناءً على **المساحة الفعلية المتغيرة**، وليس المساحة الأصلية كما في الإجهاد الهندسي. ✅

يأخذ الانفعال الحقيقي في الاعتبار التغير التدريجي في الطول، مما يجعله أكثر دقة في وصف التشوه. ✅

حساب الإجهاد والانفعال الحقيقي **أكثر تعقيدًا** من الإجهاد والانفعال الهندسي، لأن ⚠️

الإجهاد الهندسي يقسم الحمل على **المساحة الأصلية** فقط

الانفعال الهندسي يقيس التغير الكلي في الطول مقارنة بالطول الأصلي

أما في الإجهاد الحقيقي، **يجب قياس المساحة المتغيرة باستمرار** أثناء التحميل، مما يجعله أصعب في التجربة العملية

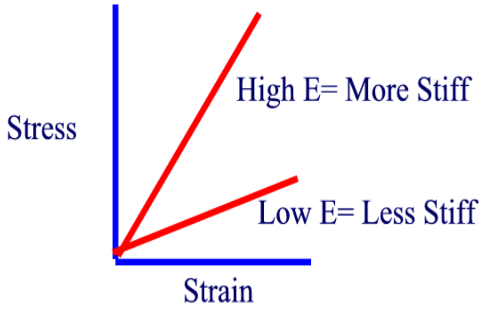
3.4Hooke's Law; Modulus of Elasticity or Young's modulus (E) (قانون هوك ومعامل المرونة)

-قانون هوك : يعبرعن العلاقة بين الإجهاد(ε) والإنفعال(σ) في المواد المرنة وفق المعادلة :

$$\sigma = E\varepsilon$$

حيث **E** هو **معامل المرونة** (Young Modulus) ويحدد مدى صلابة المادة.

وحدات **E** ⟵تقاس عادةً **بالباسكال (Pa)** أو مضاعفاته مثل الميغاباسكال**(Mpa)** أو الغيغاباسكال**(Gpa)**



-تأثير معامل المرونة على سلوك المادة:

مرتفع ⟵ مادة أكثر صلابة وأقل قابلية للتشوه.

منخفض ⟵ مادة أقل صلابة وأكثر مرونة.

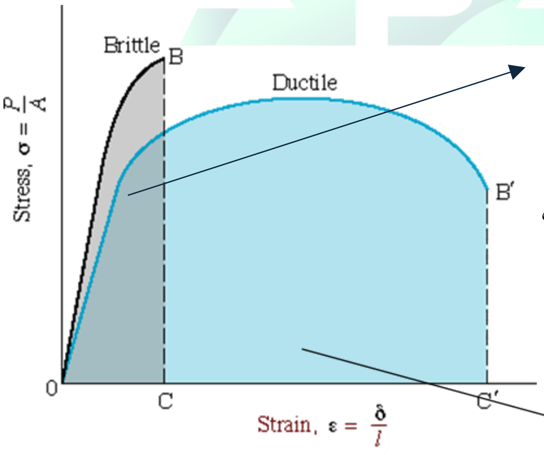
أهمية قانون هوك:

-يستخدم لتصميم المنشآت الهندسية بحيث تتحمل الأحمال دون حدوث تشوه دائم.

-يطبق فقط في **الجزء الخطي** من منحنى الإجهاد والانفعال، حيث تكون العلاقة **تناسبية** بين الإجهاد والانفعال.

3.5 Strain energy (طاقة الانفعال)

هي الطاقة المخزنة داخل المادة نتيجة تعرضها للإجهادات والتشوهات بسبب القوى الخارجية. يتم تخزين هذه الطاقة على شكل طاقة كامنة، ويمكن استرجاعها بالكامل إذا بقي التشوه ضمن الحدود المرنة للمادة.



tensile stress-strain diagrams for brittle and ductile metals loaded to fracture.

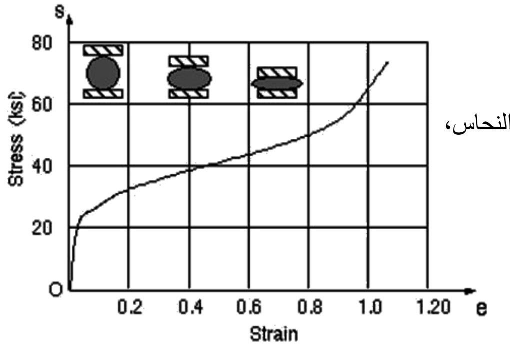
Modulus of resilience: the **area under the linear part of the curve** measuring the stored elastic energy.

المساحة تحت منحنى الإجهاد والانفعال في منطقة المرونة.

Toughness: the **total area under the curve**, which measures the energy absorbed by the specimen in the process of breaking.

المساحة تحت منحنى الإجهاد والانفعال بأكمله.

Compression Stress Strain Diagram



Compression stress-strain diagram for copper.

Stress-strain diagrams for compression have different shapes from those for tension. Ductile metals such as <u>steel</u>, <u>aluminum</u>, and <u>copper</u> have proportional limits in compression very close to those in tension, hence the initial regions of their compression stress-strain diagrams are very similar to the tension diagrams. When yielding begins, the behavior is quite different. In a tension test, the specimen is being <u>stretched</u>, <u>necking may occur</u>, and <u>ultimately fracture takes place</u>. When a small specimen of ductile material is compressed, it begins <u>to bulge outward on the sides</u> and <u>become barrel shaped</u>. With increasing load, the specimen is flattened out, thus offering increased resistance to further shortening (which means the stress-strain curve goes upward Of brittle material (concrete) has different properties in tension and compression.

يتحدث هذا النص عن الفرق بين سلوك المواد عند تعرضها لقوى الشد والضغط، وخاصة في المواد اللدنة مثل الفولاذ والألمنيوم والنحاس، وكذلك في المواد الهشة مثل الخرسانة.

1- سلوك المواد اللدنة في الشد والضغط

في البداية، يكون سلوك المادة متشابهاً في كل من الشد والضغط، حيث تخضع لنفس العلاقة الخطية بين الإجهاد والانفعال.

عند زيادة الحمل والوصول إلى مرحلة الخضوع، يصبح السلوك مختلفًا:
عند الشد: تتمدد العينة، وقد يحدث تضيق في المنتصف، وإذا استمر الحمل، تتعرض المادة للكسر.
عند الضغط: لا يحدث كسر مباشر، ولكن تبدأ العينة **بالتضخم من الجوانب** وتأخذ شكلاً **برميليًا**، ومع زيادة الضغط، تصبح أكثر **تسطحًا**، مما يجعلها أكثر مقاومة للانضغاط، ويؤدي ذلك إلى **ارتفاع منحنى الإجهاد والانفعال.**

2- سلوك المواد الهشة في الشد والضغط

تختلف المواد الهشة مثل الخرسانة عن المواد اللدنة في سلوكها:
عند تعرضها للشد: لا تتحمل الخرسانة قوى الشد بشكل جيد، حيث يمكن أن تنكسر بسرعة حتى عند تطبيق شد بسيط.
عند تعرضها للضغط: تتحمل الخرسانة قوى الضغط بشكل كبير قبل أن تنهار، مما يجعلها مناسبة للبناء.

Civiltfee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civiltfee-HU.com

النتيجة

المواد اللدنة قادرة على تحمل كل من الشد والضغط، لكن سلوكها يختلف عند زيادة الحمل.

المواد الهشة مثل الخرسانة <u>ضعيفة جدًا في الشد لكنها قوية في الضغط</u>، ولهذا يتم تسليح الخرسانة بالفولاذ لتعويض ضعفها في مقاومة الشد.

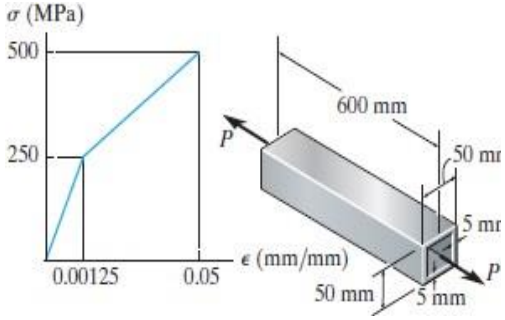
Ductile Material : Materials that are capable of undergoing large strains (*at normal temperature*) before failure. An advantage of ductile materials is that visible distortions may occur if the loads before too large. Ductile materials are also capable of absorbing large amounts of energy prior to failure. Ductile materials include mild steel, aluminum and some of its alloys, copper, magnesium, nickel, brass, bronze and many others.

المواد اللدنة هي مواد تتحمل **تشوهات كبيرة** قبل أن تنكسر، وتمتص **كميات كبيرة من الطاقة**، مما يجعلها أكثر مقاومة للصدمات. من أمثلتها: الفولاذ الطري، الألمنيوم، النحاس، المغنيسيوم، النيكل، والنحاس الأصفر.
قدرتها على التشوه الكبير قبل الفشل، مما يجعلها أكثر أمانًا في الاستخدامات الهندسية.
تُظهر تشوهات واضحة قبل الانهيار، مما يسمح باكتشاف المشاكل مبكرًا قبل حدوث الكسر.
تمتص كميات كبيرة من الطاقة قبل الفشل، مما يجعلها مناسبة في التطبيقات التي تتطلب مقاومة للصدمات.

Brittle Material **:**Materials that exhibit very little inelastic deformation. In other words, materials that fail in tension at relatively low values of strain are considered brittle. Brittle materials include concrete, stone, cast iron, glass and plaster.

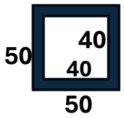
المواد الهشة هي مواد تتعرض **للتشوه القليل جدًا** قبل أن تنكسر، أي أنها تنكسر عند **إجهاد منخفض** دون أن تمر بمرحلة تشوه كبير. من أمثلتها: الخرسانة، الحجر، الحديد الزهر، الزجاج، والجص.

EX: Determine the elongation of the square hollow bar when it is subjected to **the axial force= 100 k**. If this axial force is increased **to 360 kN** and released, find he permanent elongation of the bar. The bar is made of a metal alloy having a stress–strain diagram which can be approximated as shown.



Sol:

بدنا ننتبه للمساحة هون كيف حسبها



Normal Stress and Strain: The cross-sectional area of the hollow bar is $A = 0.05^2 - 0.04^2 = 0.9(10^{-3})\text{m}^2$. When $P = 100\text{kN}$,

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{100(10^3)}{0.9(10^{-3})} = 111.11 \text{ MPa}$$

From the stress–strain diagram shown in Fig. *a*, the slope of the straight line *OA* which represents the modulus of elasticity of the metal alloy is

$$E = \frac{250(10^6) - 0}{0.00125 - 0} = 200 \text{ GPa}$$

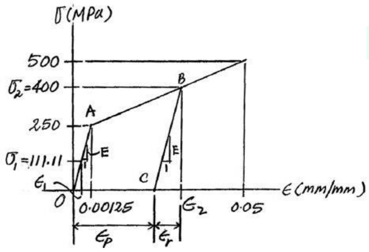
Since $\sigma_1 < 250$ MPa, Hooke's Law can be applied. Thus

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1;\ 111.11(10^6) = 200(10^9)\varepsilon_1$$

$$\varepsilon_1 = 0.5556(10^{-3}) \text{ mm/mm}$$

Thus, the elongation of the bar is

$$\delta_1 = \varepsilon_1 L = 0.5556(10^{-3})(600) = 0.333 \text{ mm}$$



When $P = 360$ kN,

$$\sigma_2 = \frac{P}{A} = \frac{360(10^3)}{0.9(10^{-3})} = 400 \text{ MPa}$$

From the geometry of the stress–strain diagram

$$\frac{\varepsilon_2 - 0.00125}{400 - 250} = \frac{0.05 - 0.00125}{500 - 250} \qquad \varepsilon_2 = 0.0305 \text{ mm/mm}$$

When $P = 360$ kN is removed, the strain recovers linearly along line *BC*, Fig. *a*, parallel to *OA*. Thus, the elastic recovery of strain is given by

$$\sigma_2 = E\varepsilon_r; \qquad 400(10^6) = 200(10^9)\varepsilon_r$$

$$\varepsilon_r = 0.002 \text{ mm/mm}$$

The permanent set is

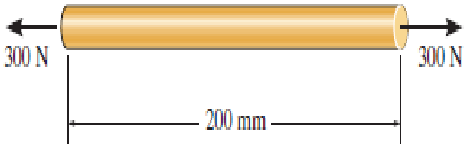
$$\varepsilon_P = \varepsilon_2 - \varepsilon_r = 0.0305 - 0.002 = 0.0285 \text{ mm/mm}$$

Thus, the permanent elongation of the bar is

$$\delta_P = \varepsilon_P L = 0.0285(600) = 17.1 \text{ mm}$$

www.Civilittee-HU.com

EX: The acrylic plastic rod is **200 mm long** and **15 mm in diameter**. If an **axial load of 300 N** is applied to it, determine the change in its length and the change in its diameter. **Ep = 2.70 GPa, υp = 0.4**



$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{300}{\frac{\pi}{4}(0.015)^2} = 1.697 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{\text{long}} = \frac{\sigma}{E} = \frac{1.697(10^6)}{2.70(10^9)} = 0.0006288$$

$$\delta = \varepsilon_{\text{long}} L = 0.0006288\,(200) = 0.126 \text{ mm}$$

$$\varepsilon_{\text{lat}} = -V\varepsilon_{\text{long}} = -0.4(0.0006288) = -0.0002515$$

هاي الفكرة مطروحة اخر الشابتر

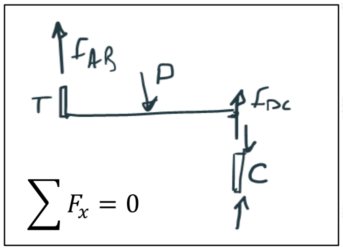
$$\Delta d = \varepsilon_{\text{lat}} d = -0.0002515\,(15) = -0.00377 \text{ mm}$$

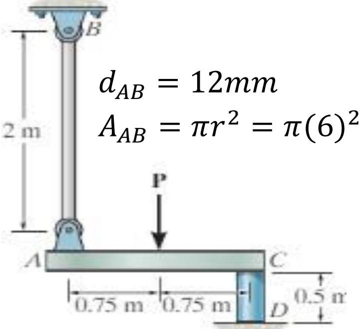
EX: The stress strain diagram for a polyester resin is shown. If the rigid beam Ac is supported by a strut AB and post CD made from the material, determine <u>the largest load P</u> that can be applied to the beam before it **ruptures.** The diameter of **the strut is 12 mm** and the diameter of **the post is 40 mm.**

$$F_{AB} = \frac{P}{2} \; Tension$$

$$F_{CD} = \frac{P}{2} \; Compression$$

$$\sigma_{Ten} = 50 \; Mpa \quad , \sigma_{Com} = 95 \; Mpa$$





$$d_{AB} = 12mm$$

$$A_{AB} = \pi r^2 = \pi(6)^2$$

$$d_{CD} = 40mm$$

$$A_{AB} = \pi r^2 = \pi(20)^2$$

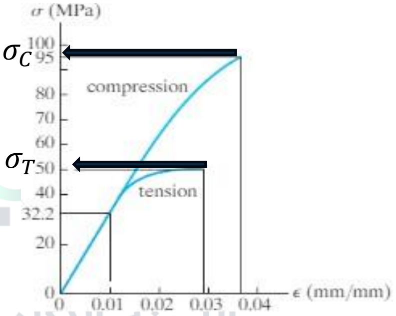
$$\sigma_{AB} = \frac{p/2}{\pi(6)^2} = 50 \rightarrow p = 11300N$$

$$\sigma_{AB} = \frac{p/2}{\pi(20)^2} = 95 \rightarrow p = 239000N$$

The largest load is the smallest P

$P = 11300 = 11.3kN$

أقل قيمة لأنها تمثل **الحمل الحرج** الذي
يؤدي الى **فشل <u>أحد</u> العناصر أولا**



Civil++
اللجنة الاكاديمية لقسم الهندسة المدنية

EX: A nylon thread is subjected to a **8.5 N tension force**. Knowing that ***E*= 3.3 GPa** and that <u>the length</u> of the thread **<u>increases by 1.1%</u>**, determine the **<u>diameter of the thread (d)</u>**.

ε

$$\sigma = E\varepsilon \rightarrow (3.3 \times 1000)\left(\frac{1.1}{100}\right) = 36.3Mpa$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \rightarrow 36.3 = \frac{8.5}{\pi(\frac{d^2}{4})} \rightarrow \boldsymbol{d = 0.546mm}$$

EX: A control rod made of yellow brass must **<u>not stretch more than 3 mm</u>** when **the tension in the wire is 4 kN.** Knowing that ***E* = 105 GPa** and that the maximum **allowable normal stress is 180 MPa**,Determine (*a*) <u>the smallest diameter rod that should be used</u>, (*b*) <u>the corresponding maximum length of the rod.</u>

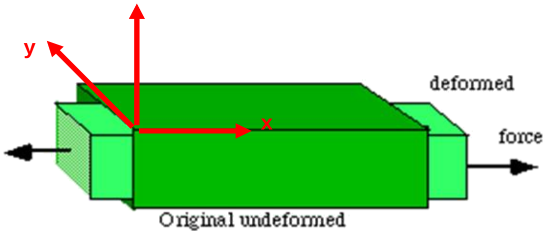
$$\sigma = \frac{P}{A} \rightarrow 180 = \frac{4000}{\pi\left(\frac{d^2}{4}\right)} \rightarrow \boldsymbol{d = 5.32mm}$$

$$\sigma = E\varepsilon \rightarrow 180 = (1000)(105)(\varepsilon) \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon = 1.714 \times 10^{-3}}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \rightarrow 1.714 \times 10^{-3} = \frac{3}{L} \rightarrow \boldsymbol{L = 1.75m}$$

عند شد مادة معينة، فإنها **تتمدد طوليًا** ولكنها **تتناقص عرضيًا**، ومعامل بواسون يعبر عن مدى هذا التغير النسبي.

3.6 POISSON'S RATIO (معامل بواسون)

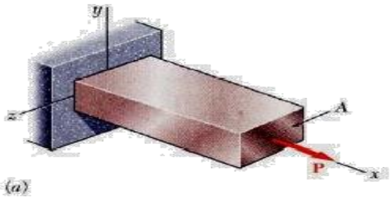


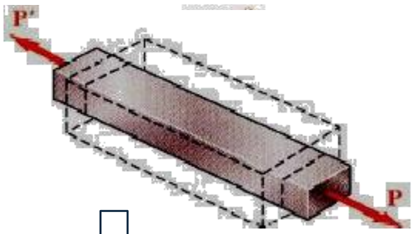
Poisson's ratio is defined as

$$\nu = \left|\frac{\text{lateral strain}}{\text{axial strain}}\right| = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

$$\varepsilon' \text{ (lateral strain)} = -\nu\, \varepsilon$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\nu \sigma_x}{E}$$





Isotropic: Isotropic materials have elastic properties that are independent of direction. Most common structural materials are isotropic.

المواد المتجانسة: هي المواد التي تكون خصائصها المرنة **متساوية في جميع الاتجاهات**، أي أن **استجابتها للإجهاد لا تعتمد على الاتجاه الذي يتم تطبيق الحمل فيه**. معظم المواد الإنشائية، مثل الفولاذ والألمنيوم، تعتبر مواد متجانسة

Anisotropic:Materials whose properties depend upon direction. An important class of anisotropic materials is fiber-reinforced composites.

المواد غير المتجانسة: هي المواد التي **تتغير خصائصها حسب اتجاه تطبيق الحمل.**

Homogeneous: A material is homogeneous if it has the same composition at every point in the body. A homogeneous material may or may not be isotropic.

المادة المتجانسة: هي المادة التي تكون **تركيبها موحدًا في جميع أجزائها**، أي أن مكوناتها متوزعة بشكل متساوٍ في كل نقطة داخلها. ومع ذلك، يمكن أن تكون **متجانسة لكنها ليست متساوية الخواص**، أي أنها قد تمتلك خصائص مختلفة حسب الاتجاه.

العلاقة بينهما:

1- يمكن أن تكون المادة **متجانسة ومتساوية الخواص**، مثل الفولاذ.

2- يمكن أن تكون **غير متجانسة وغير متساوية الخواص**، مثل المواد المركبة المدعمة بالألياف.

3- يمكن أن تكون **متجانسة ولكن غير متساوية الخواص**، مثل بعض البلورات والمواد المركبة.

Homogeneous

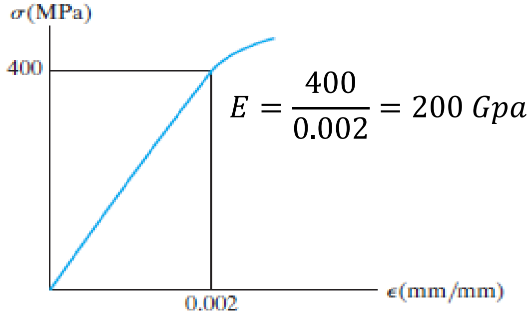
هي المادة التي يكون **تركيبها موحدًا** في جميع أجزائها، أي أن أي نقطة داخل المادة لها نفس التركيب الكيميائي والخصائص الفيزيائية

Isotropic

هي المادة التي تكون **خصائصها المرنة والميكانيكية متساوية في جميع الاتجاهات**، أي أن استجابتها للإجهادات لا تتغير بتغير الاتجاه

معامل بواسون يصف كيف **يقل العرض عند شد المادة طوليًا**. في المواد **متساوية الخواص**(Isotropic)**يكون معامل بواسون ثابتًا في جميع الاتجاهات، لكن في المواد غير متساوية الخواص** (Anisotropic)، **يمكن أن يختلف حسب الاتجاه.**

EX: The elastic portion of the stress–strain diagram for a steel alloy is shown. The specimen from which it was obtained had an **original diameter of 13 mm** and a gauge **length of 50 mm**. When the applied load on the specimen **is 50 kN**, the diameter is **12.99265 mm**. Determine Poisson's ratio for the material.



$$E = \frac{400}{0.002} = 200\ Gpa$$

$$\nu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon_a} \quad , \varepsilon_a = \frac{\sigma}{E} \quad , \varepsilon' = \frac{\Delta d}{d_\circ}$$

$$\sigma = \frac{P}{A_\circ} = \frac{(5000)(4)}{(\pi)(13^2)} = 376.7\ Mpa$$

$$\varepsilon_a = \frac{376.7}{200 \times 10^3} = 1.8835 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d_\circ} = \frac{13 - 12.99265}{13} = 0.56538 \times 10^{-3}$$

$$\boldsymbol{\nu = \frac{0.56538 \times 10^{-3}}{1.8835 \times 10^{-3}} = 0.3}$$

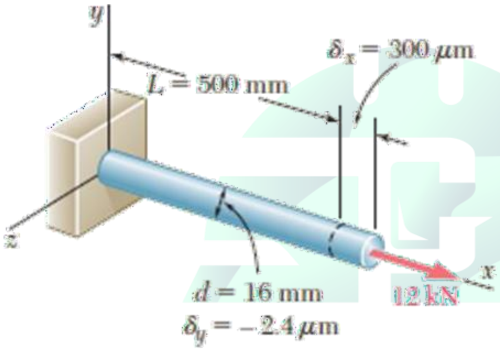


Fig. 2.31 Axially loaded rod.

A 500-mm-long, 16-mm-diameter rod made of a homogenous, isotropic material is observed to increase in length by 300 μm, and to decrease in diameter by 2.4 μm when subjected to an axial 12-kN load. Determine the modulus of elasticity and Poisson's ratio of the material.

اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية

The cross-sectional area of the rod is

$$A = \pi r^2 = \pi(8 \times 10^{-3}\,\text{m})^2 = 201 \times 10^{-6}\,\text{m}^2$$

Choosing the x axis along the axis of the rod

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{12 \times 10^3\,\text{N}}{201 \times 10^{-6}\,\text{m}^2} = 59.7\ \text{MPa}$$

$$\epsilon_x = \frac{\delta_x}{L} = \frac{300\ \mu\text{m}}{500\ \text{mm}} = 600 \times 10^{-6}$$

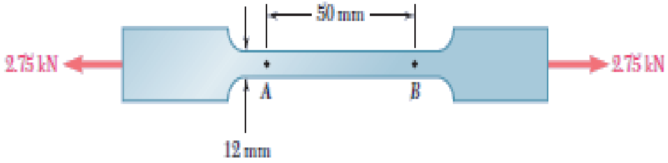
$$\epsilon_y = \frac{\delta_y}{d} = \frac{-2.4\ \mu\text{m}}{16\ \text{mm}} = -150 \times 10^{-6}$$

From Hooke's law, $\sigma_x = E\epsilon_x$,

$$E = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = \frac{59.7\ \text{MPa}}{600 \times 10^{-6}} = 99.5\ \text{GPa}$$

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{-150 \times 10^{-6}}{600 \times 10^{-6}} = 0.25$$

EX: A **2.75-kN tensile load** is applied to a test coupon made from **1.6- mm** flat steel plate **(*E* = 200 GPa, υ= 0.30).** **Determine the resulting change** (*a*) in the 50-mm gage length, (*b*) in the width of portion *AB* of the test coupon, (*c*) in the thickness of portion *AB*,(*d*) in the cross-sectional area of portion *AB.*



$$A = (1.2)(1.6) = 19.2mm^2$$

$$\sigma_a = \frac{P}{A} = \frac{2.75 \times 10^3}{19.2} = 143.23\ Mpa$$

$$\sigma_a = E\varepsilon_a \rightarrow 143.23 = (200 \times 10^3)(\varepsilon_a)$$

$$\varepsilon_a = 7.1615 \times 10^{-4} \rightarrow \frac{\delta_{AB}}{50} \rightarrow \delta_{AB} = \mathbf{0.036mm}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_L = -v\varepsilon_a} \rightarrow \ \varepsilon_L = -(0.3)(7.1615 \times 10^{-4}) = -2.1485 \times 10^{-4} \rightarrow \frac{\delta_W}{12}$$

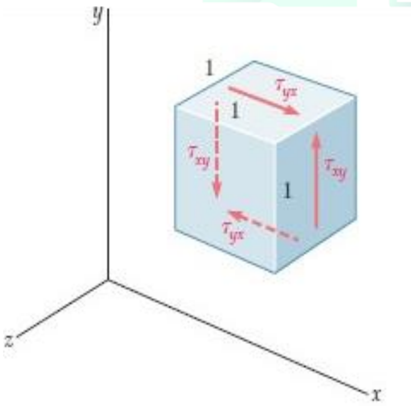
$$\delta_W(change\ in\ the\ width) = \mathbf{-2.578 \times 10^{-3}mm}$$

$$\varepsilon_{L=} \frac{\delta_t}{L} \rightarrow -2.1485 \times 10^{-4} = \frac{\delta_t}{1.6} \rightarrow \delta_t(change\ in\ thickness) = \mathbf{-3.4376 \times 10^{-4}}$$

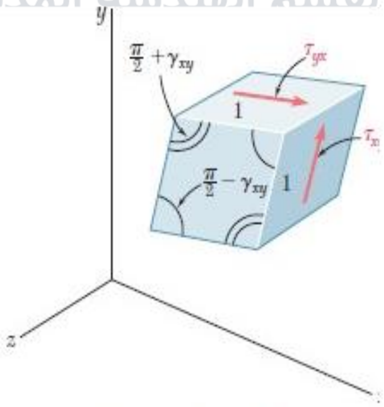
$$Change\ in\ cross\ sectional\ area\ \Delta A = A_\circ - A' = (19.2) - (12 - 2.578 \times 10^{-3})(1.6 - 3.4376 \times 10^{-4}) = \mathbf{0.00825m^2}$$

3.7 Hooke’s Law in Shear(قانون هوك في القص)

-Shearing Strain



Unit cubic element subjected to shearing stress.



Deformation of unit cubic element due to shearing stress.

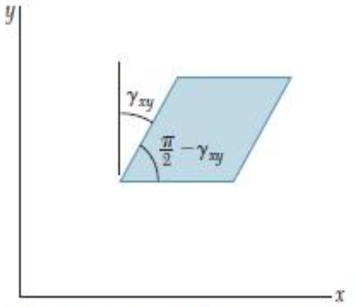


Fig. 2.38 Cubic element as viewed in *xy*-plane after rigid rotation.

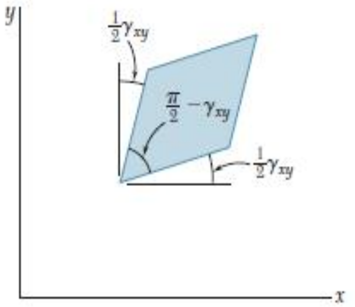


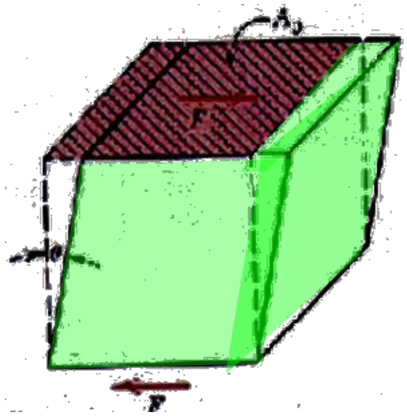
Fig. 2.39 Cubic element as viewed in *xy*-plane with equal rotation of *x* and *y* faces.

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

Hooke’s law *for* *shearing stress* *and* *strain*, and the constant **G** is called **the *modulus of rigidity* or *shear modulus*** of the material.

قانون هوك للإجهاد والانفعال القصي يعبر عن العلاقة بين **إجهاد القص(Shear Stress) وانفعال القص (Shear Strain) في المواد المرنة، وهو مشابه لقانون هوك في الشد والضغط.**

الصيغة الرياضية:



$$\tau = G \cdot \gamma$$

τ: (Shear Stress)هو **إجهاد القص**

G: (the *modulus of rigidity* or *shear modulus*)**وهو ثابت يحدد مدى مقاومة المادة للتشوه القصي.**

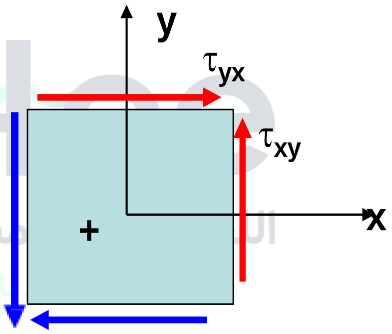
γ: (Shear Strain)هو **انفعال القص**

- كلما كان **معامل الصلابة G أكبر**، كانت المادة **أكثر مقاومة للقص وأقل عرضة للتشوه تحت تأثير قوى القص.**

It is also used to relate shear and elastic moduli•

$$G = \frac{E}{2(1+v)}$$

هذا القانون يوضح أن **معامل القص G يعتمد على معامل المرونة E ومعامل بواسون. كلما زاد E زادت صلابة المادة، وكلما زاد v أصبح تأثير التشوه الجانبي أكبر، مما يقلل من معامل القص G .**



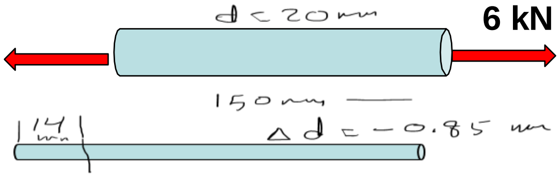
حيث أن:

G: هو معامل القص، ويعبر عن مدى مقاومة المادة للتشوه القصي.

E:هو معامل المرونة أو معامل يونغ، وهو مقياس لصلابة المادة عند الشد أو الضغط.

v:هو معامل بواسون، الذي يعبر عن نسبة التغير في العرض إلى التغير في الطول عند شد المادة.

EX: A 20 mm diameter rod made of plastic is subjected to tensile force = 6 kN. Knowing that an **elongation of 14 mm** and **decrease in diameter of 0.85 mm** are observed in a **150 mm length** , determine **the modulus of elasticity**, **the modulus of rigidity** and **poisons ratio for the material**.



$$\sigma_a = E\varepsilon_a \rightarrow \frac{P}{A} = (E)\left(\frac{\delta}{L}\right) \rightarrow \frac{6000}{(\pi)(10^2)} = (E)\left(\frac{14}{150}\right)$$

$$\boldsymbol{E = 204.6\ Mpa}$$

$$v = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \rightarrow \frac{\Delta d/d}{\delta/L} \rightarrow \frac{0.85/20}{14/150}$$

$$\boldsymbol{v = 0.455}$$

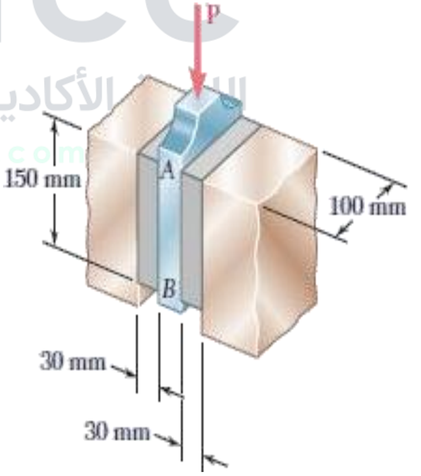
$$G = \frac{E}{2(1+v)} \rightarrow \frac{204.6}{2(1+0.455)}$$

$$\boldsymbol{G = 70.3\ Mpa}$$

→ *Double shear*

EX: A vibration isolation unit consists of **two blocks** of hard rubber bonded to a plate *AB* and to rigid supports as shown. Knowing that a force of magnitude ***P* = 25 kN** causes a **deflection δ= 1.5 mm** of plate *AB*, determine the **modulus of rigidity** of the rubber used.

Civilittee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civilittee-HU.com



$$\tau = G\gamma \quad ,\tau = \frac{P}{A} \quad ,\tan\gamma = \frac{\delta}{L}$$

$$\tau = \frac{2500}{(2)(100)(150)} = \boldsymbol{0.833\ Mpa}$$

$$\tan\gamma = \gamma = \frac{1.5}{30} = \boldsymbol{0.05\ rad}$$

$$0.833 = G(0.05)$$

$$\boldsymbol{G = 16.66\ Mpa}$$

عشان توضح الفكرة بشكل أفضل وما يخطر ببالك سؤال ليش ما أخذنا $\tan^{-1}$ وحطينا:

$$\tan\gamma = \gamma$$

لأن shear strain (γ) يُعرّف مباشرة على أنه **التانجينت للزاوية الصغيرة** الناتجة عن التشوه، وليس الزاوية نفسها.

بما أن γ **هو الزاوية نفسها عندما تكون صغيرة** (بالراديان)، فإنه يمكن تقريب العلاقة:

$$\tan\gamma \approx \gamma$$

وهذا ينطبق في معظم مسائل الميكانيكا الإنشائية والهندسة، حيث تكون الزوايا صغيرة جدًا، وبالتالي:

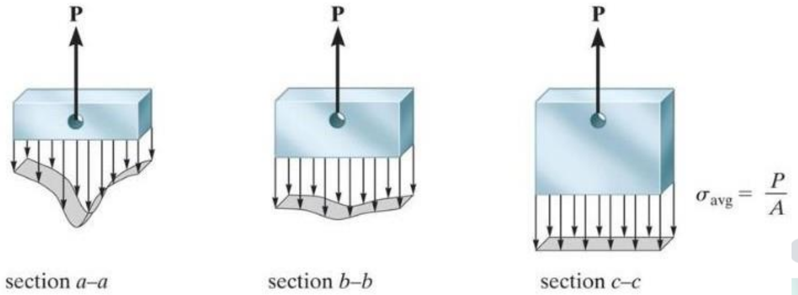
$$\gamma = \frac{\delta}{L}$$

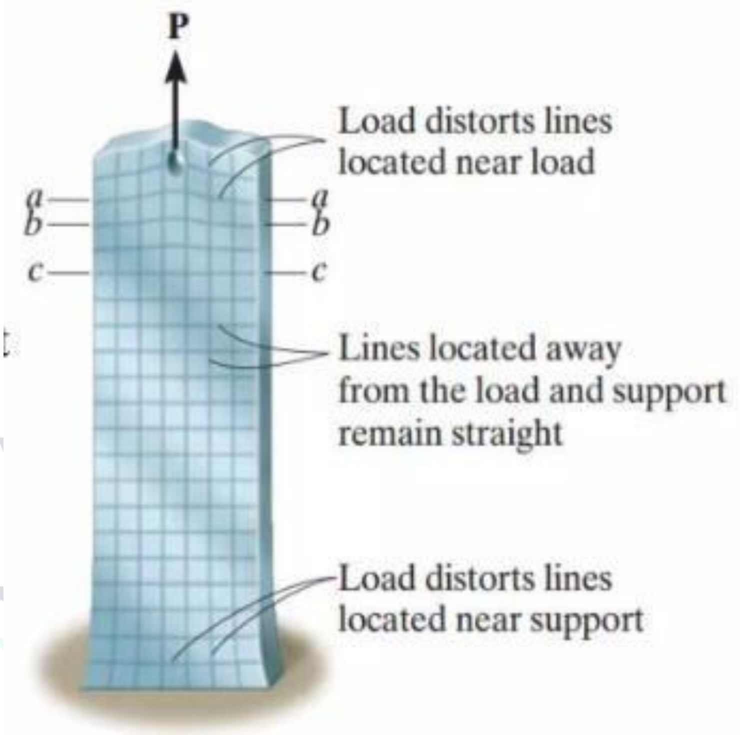
لو كانت الزاوية كبيرة، عندها قد نحتاج لأخذ ال (inverse tangent) لحساب الزاوية بدقة، لكن هنا، بسبب صغر الزاوية، التقريب $\tan\gamma \approx \gamma$ كافٍ.

CHAPTER 4

Axial Load

4.1 Saint-Venant's principle 1855 (مبدأ سانت فينان)





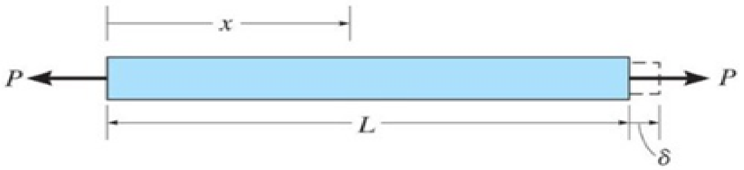
-إذا كان القضيب مكون من عدة أجزاء **بمقاطع عرضية ومواد مختلفة**، فيجب تقسيم القضيب إلى عدة أجزاء وحساب التشوه الكلي **بجمع التشوهات لكل جزء**.

النص الدقيق لمبدأ سانت فينان:

تأثير توزيع الأحمال على الإجهادات والانفعالات في جسم مرن **يقتصر على منطقة قريبة من نقطة التطبيق**، أما في المناطق البعيدة، فإن توزيع الإجهادات يكون مستقلاً عن تفاصيل توزيع الحمل ويأخذ شكلاً أبسط، كما لو كان الحمل موزعًا بشكل منتظم.

4.2 Elastic deformation of an axially loaded member (التشوه المرن لعنصر محمل محوريًا)

Constant Load and Cross-Section Area

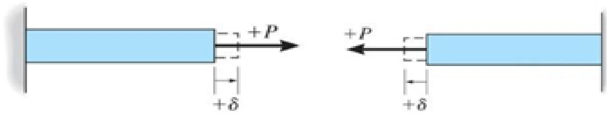


For homogeneous prismatic bar

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \;,\; \sigma = \frac{P}{A} \;,\; \sigma = E\varepsilon \rightarrow$$

$$\frac{P}{A} = E \times \frac{\delta}{L} \rightarrow \delta = \frac{PL}{EA}$$

Sign Convention



If the rod is loaded at other points, or consists of several portions of various cross sections and possibly of different materials, it must be divided into component parts.

-إذا كان القضيب <u>مكون من عدة أجزاء</u> **<u>بمقاطع عرضية ومواد مختلفة</u>**، فيجب <u>تقسيم</u> القضيب إلى عدة أجزاء وحساب التشوه الكلي **<u>بجمع التشوهات لكل جزء</u>**.

$$\delta = \sum \frac{P^i L^i}{E_i A_i}$$

Civiltee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.civiltee-HU.com

يحدث **التشوه المرن** عندما يتعرض عنصر إنشائي لقوة محورية (شد أو ضغط) تؤدي إلى تغيير في طوله، ولكن هذا التغيير يكون **مؤقتًا**، أي أن العنصر يعود إلى طوله الأصلي عند إزالة الحمل، طالما لم يتجاوز حد المرونة (Elastic limit) للمادة.

$$\delta = \frac{PL}{EA}$$

حيث:

P: القوة المحورية (kN أو N).

L: الطول الأصلي للعنصر (mm أو m).

E: معامل المرونة (GPa أو MPa).

A: المساحة المقطعية للعنصر (mm^2 أو m^2).

-عند تطبيق **قوة شد محورية** على قضيب معدني، فإنه **يستطيل** بمقدار δ

-عند تطبيق **قوة ضغط محورية**، فإنه **ينكمش** بمقدار δ

-يعتمد مقدار التشوه على **مادة العنصر(من خلال معامل المرونة E)** ، **وأبعاده الهندسية (الطول والمساحة).**

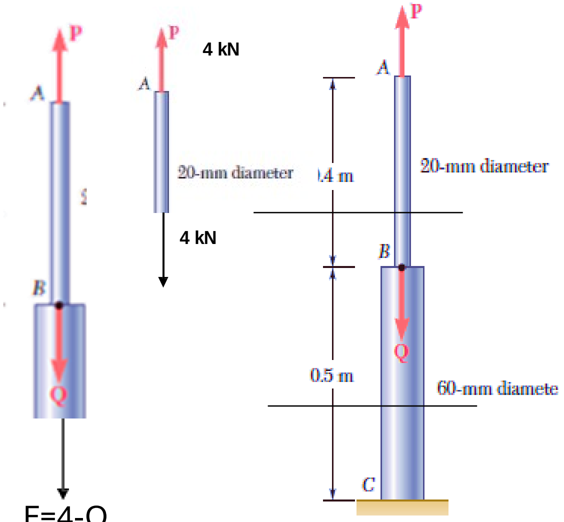
EX: Both portions of the rod *ABC* are made of an aluminum for which ***E* = 70 GPa.** Knowing that the magnitude of **P is 4 kN**, determine (*a*) the value of **Q** so that the deflection at ***A* is zero**, (*b*) the corresponding **deflection of *B*.**

$$\delta = \sum \frac{P^i L^i}{E_i A_i} = \frac{4000 \times 400}{(70000)(\pi)(10^2)} + \frac{(4000 - Q)(500)}{(70000)(\pi)(30^2)}$$

$$Q = 32800N = 32.8kN$$

حساب التشوه الكلي **بجمع التشوهات لكل جزء**

$$\delta_B = \frac{QL}{EA} = \frac{(4000 - 32800)(500)}{(70000)(\pi)(30^2)} = -0.0728mm$$



F=4-Q

Statics

$$\sum F_X = 0$$

$$F_y = P - Q \rightarrow F = 4 - Q$$

Civiltee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.civiltee-HU.com

EX: The steel frame (***E* = 200 GPa**) shown has a diagonal brace ***BD* with an area of 1920** mm². Determine the largest allowable load **P** if the **change in length of member *BD*** **is not to exceed 1.6 mm**.

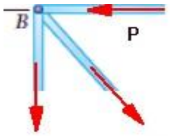
The key

يعني مش مسموحله يتمدد أكثر من 1.6 ف الماكس هاي

$$\delta = \frac{PL}{EA} = \frac{(P)(7.81)(1000)}{(200000)(1920)} = 1.6$$

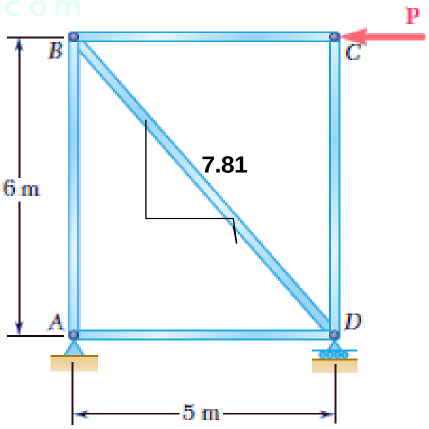
$$P = 50.36\ kN$$

$$F_{BD} = 78668.4\ N = 78.668\ kN$$

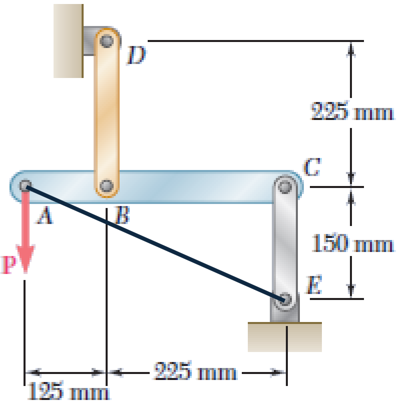


Statics

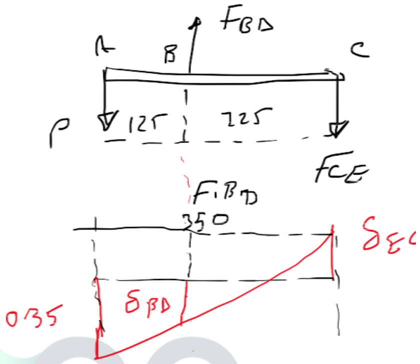
$$F_{BD} = \frac{7{,}81\ P}{5} = 1.562P$$



EX: Link *BD* is made of <u>brass</u> **(*E* = 105 GPa)** and has a cross-sectional area **of 240 mm²**. Link *CE* is made of <u>aluminum</u> **(*E* = 72 GPa**) and has a cross-sectional **area of 300 mm²**. Knowing that they support rigid member *ABC*, determine the maximum force **P** that can be applied vertically at point *A* **<u>if the deflection of *A* is not to exceed 0.35 mm.</u>**



$$\sum M_c = 0 \rightarrow 350 - (225)(F_{BD})$$
$$F_{BD} = 1.56P\ (T)$$
$$\sum F_y = 0 \rightarrow -P + 1.56P - F_{CE}$$
$$F_{CE} = 0.56P\ (T)$$



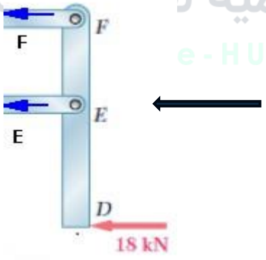
$$\delta_{BD} = \frac{(1.56P)(225)}{(105000)(240)} = 1.393 \times 10^{-5}P \quad , \quad \delta_{EC} = \frac{(0.56P)(150)}{(72000)(300)} = 3.89 \times 10^{-5}P$$

$$\frac{0.35 + \delta_{EC}}{350} = \frac{\delta_{BD} + \delta_{EC}}{225} \rightarrow \frac{0.35 + 3.89 \times 10^{-5}P}{350} = \frac{1.393 \times 10^{-5}P + 3.89 \times 10^{-5}P}{225}$$

$$\boldsymbol{P = 14.69kN}$$

EX: embers *ABC* and *DEF* are joined with steel links (***E* = 200 GPa)**. Each of the links is made of a **pair of 25x35- mm** plates. Determine the **<u>change in length of member *BE*</u>**, and **<u>member *CF*.</u>**

$$\sum M_F = 0 \rightarrow (-18)(440) - (180)(P_E) = 0$$
$$\boldsymbol{P_E = -44kN\ (C)}$$
$$\sum F_X = 0 \rightarrow 44 - 18 - P_F = 0$$
$$\boldsymbol{P_F = 26kN\ (T)}$$



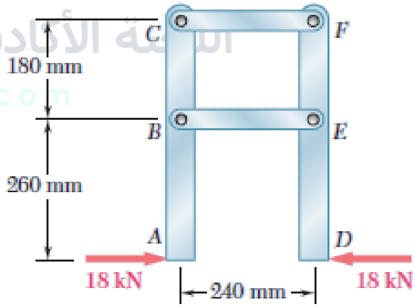


Fig. P2.26

$$\delta_{EB} = \frac{P_E\,L}{EA} \rightarrow \frac{(-44000)(240)}{(200000)(2)(25 \times 35)} = \boldsymbol{-0.0302\ mm}$$

$$\delta_{EB} = \frac{P_E\,L}{EA} \rightarrow \frac{(26000)(240)}{(200000)(2)(25 \times 35)} = \boldsymbol{0.01783\ mm}$$

4.4 Statically indeterminate axially loaded members (العناصر المحملة محوريًا غير محددة استاتيكيًا)

There are many problems, however, where the internal forces cannot be determined from statics alone. In most of these problems, the reactions themselves—the external forces— cannot be determined by simply drawing a free-body diagram of the member and writing the corresponding equilibrium equations. The equilibrium equations must be complemented by relationships involving deformations obtained by considering the geometry of the problem. Because statics is not sufficient to determine either the reactions or the internal forces, problems of this type are called ***statically indeterminate***.

في بعض المسائل الهندسية، لا يمكن تحديد القوى الداخلية (مثل الإجهادات وردود الأفعال) باستخدام **معادلات الاتزان وحدها**. هذا يعني أن مجرد رسم مخطط لا يكفي لإيجاد جميع المتغيرات المطلوبة **(مجموع القوى = صفر ومجموع العزوم = صفر)** الجسم الحر وكتابة معادلات الاتزان.

كيف يحدث ذلك؟

عندما يكون العنصر الخاضع لحمل محوري **مدعومًا بأكثر من تقييد واحد** (مثل قضيب مثبت من الطرفين)، فإن القوى الداخلية لا يمكن تحديدها فقط من معادلات الاتزان، بل نحتاج إلى استخدام **معادلات المرونة والتشوهات** لحل المسألة.

لماذا يحدث ذلك؟

لأن هناك قيودًا إضافية في النظام، مثل وجود **أكثر من مسند يحمل القوة**، مما يجعل **عدد المجاهيل** أكثر من **عدد معادلات الاتزان المتاحة.**

كيف نحل هذه المسائل؟

لحل هذه المشاكل، نستخدم معادلات إضافية تعتمد على **التشوهات والانفعالات** في الجسم، أي ندرس كيف يتغير شكل الجسم نتيجة الأحمال، ونستخدم هذه المعلومات لاستنتاج القوى غير المعروفة.

مثال بسيط للتوضيح:

إذا كان لدينا قضيب معدني **مثبت من الطرفين** ويتعرض لحمل محوري في المنتصف، فإن **القوى الداخلية** في كل جزء من القضيب لا يمكن حسابها فقط باستخدام معادلات الاتزان، بل نحتاج إلى معرفة كيف يتوزع التشوه في القضيب لاشتقاق معادلات إضافية وحلها.

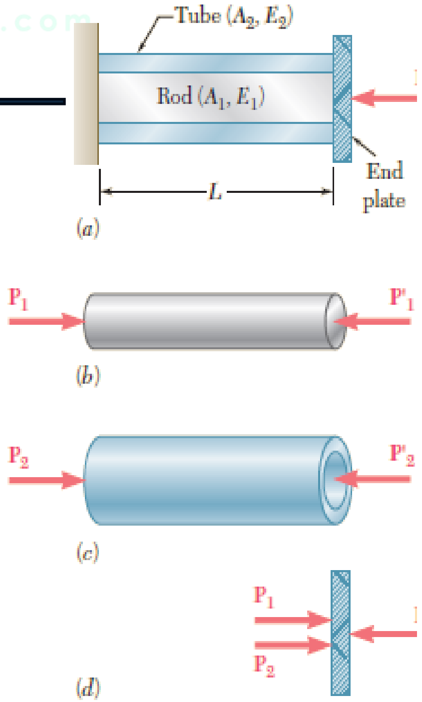
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civiliftee-HU.com

statically indeterminate

$$P_1 + P_2 = P \longrightarrow 1$$

التشوه متساوي ليش؟!

بكل بساطة هون بس **القوة تضغط** رح يطرأ **نفس التشوه** على التيوب والرود.



δ_1 and δ_2 of the rod and tube **must be equal**

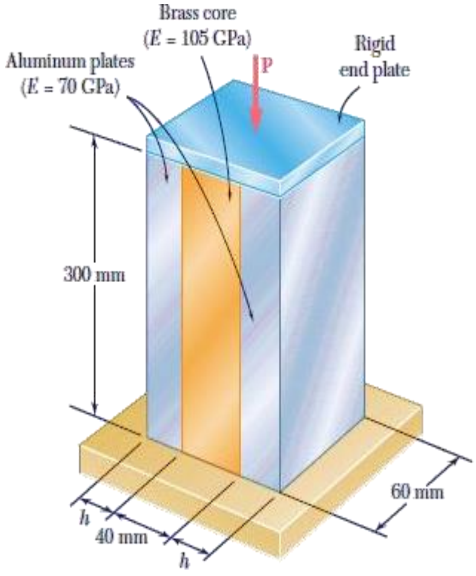
$$\delta_1 = \frac{P_1 L}{E_1 A_1} = \delta_2 = \frac{P_2 L}{E_2 A_2}$$

$$\frac{P_1}{E_1 A_1} = \frac{P_2}{E_2 A_2} \longrightarrow 2$$

Solve 1&2

$$P_1 = \frac{A_1 E_1 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2} \qquad P_2 = \frac{A_2 E_2 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$

EX: An axial centric force of magnitude ***P*=450 kN** is applied to the composite block shown by means of a rigid end plate. Knowing **that *h* = 10 mm**, determine the normal stress in (*a*) the **brass** core, (*b*) the **aluminum** plates.



$P_B + P_{Al} = 450000\ N$

$$\boldsymbol{\delta_1 = \frac{P_1 L}{E_1 A_1} \quad = \quad \delta_2 = \frac{P_2 L}{E_2 A_2}}$$

$$P_1 = \frac{A_1 E_1 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2} \qquad P_2 = \frac{A_2 E_2 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$

$$\delta_B = \frac{P_B L}{E_B A_B} = \frac{P_B(300)}{(105000)(40 \times 60)} = \mathbf{1.1905 \times 10^{-6} \boldsymbol{P_B}}$$

$$\delta_{Al} = \frac{P_{Al} L}{E_{Al} A_{Al}} = \frac{P_{Al}(300)}{(70000)(2)(10 \times 60)} = \mathbf{3.5714 \times 10^{-6} \boldsymbol{P_{Al}}}$$

$3.5714 \times 10^{-6} P_{Al} = 1.1905 \times 10^{-6} P_B \rightarrow \boldsymbol{P_B = 3P_{Al}}$

$3P_{Al} + P_{Al} = 450000\ N$

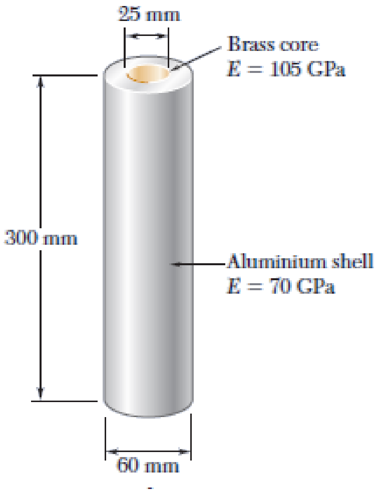
$\boldsymbol{P_{Al} = 112500\ N}$

$\boldsymbol{P_B = 3(112500) = 337500\ N}$

$$\sigma_B = \frac{\mathbf{337500}}{40 \times 60} = \mathbf{140.625\ \boldsymbol{Mpa}} \quad , \qquad \sigma_{Al} = \frac{\mathbf{112500}}{10 \times 60} = \mathbf{93.75\ \boldsymbol{Mpa}}$$

CiviliTee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية

EX: The length of the assembly shown **decreases by 0.40 mm** when an axial force is applied by means of rigid end plates. Determine (*a*) the magnitude of the applied force, (*b*) the corresponding stress in the brass core.



$\boldsymbol{\delta_B = \delta_{Al} = \delta = 0.4}$

$\boldsymbol{P_B + P_{Al} = P}$

$$\frac{P_B(300)}{(105000)(\pi(12.5)^2)} = \frac{P_{Al}(300)}{(105000)(\pi(30 - 12.5)^2)}$$

$5.823 \times 10^{-6} P_B = 1.835 \times 10^{-6} P_{Al} = 0.4$

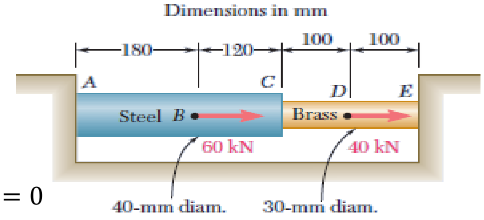
$5.823 \times 10^{-6} P_B = 0.4 \rightarrow \boldsymbol{P_B = 68.693\ \mathrm{kN}}$

$1.835 \times 10^{-6} P_{Al} = 0.4 \rightarrow \boldsymbol{P_{Al} = 217.98\ \mathrm{kN}}$

$\boldsymbol{P_{Total} = 68.693 + 217.98 = 286.673\mathrm{kN}}$

$$\boldsymbol{\sigma_B = \frac{P_B}{A_B} = \frac{68.693}{\pi(12.5)^2} = 140\ Mpa}$$

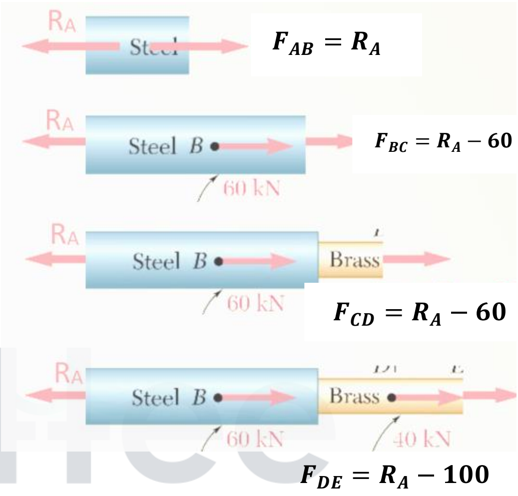
EX: Two cylindrical rods, one of steel and the other of brass, are joined at *C* and restrained by rigid supports at *A* and *E*. For the loading shown and knowing that ***Es* = 200 GPa** and ***Eb* = 105 GPa**, determine (*a*) **the reactions at *A* and *E***, (*b*) **the deflection of point *C*.**



$$\sum\delta = 0 \rightarrow \delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD} + \delta_{DE=0}$$

$$\sum\delta = \frac{(R_A)(180)}{200000(\pi \times (20)^2)} + \frac{(R_A - 60000)(120)}{200000(\pi \times (20)^2)} + \frac{(R_A - 60000)(100)}{105000(\pi \times (15)^2)} + \frac{(R_A - 100000)(100)}{105000(\pi \times (15)^2)} = 0$$

$R_A = 63\ kN$ $\xrightarrow[\sum F_X = 0]{}$ $R_E = -37\ kN$ ⟶ Part (a)



$$\delta_C = \delta_{AB} + \delta_{BC} = \frac{(63000)(180) + (3000)(120)}{200000(\pi \times (20)^2)} = 0.047\ mm$$

Part (b)

Civiltee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civilittee-HU.com

4.6 Thermal stresses (الإجهادات الحرارية)

الإجهادات الحرارية هي الإجهادات التي تنشأ في جسم ما **بسبب التغير في درجة الحرارة**، خاصةً عندما يتم **تقييد التمدد** أو **الانكماش الحراري.**

كيف تحدث؟

عندما يتم **تسخين أو تبريد جسم**، فإنه **يتمدد أو ينكمش** تلقائيًا.

إذا كان الجسم **حرًا في التمدد أو الانكماش**، فلن تتولد أي إجهادات.

لكن **إذا كان هناك قيود تمنع التمدد أو الانكماش** (مثل تثبيت أحد طرفي القضيب أو كلا الطرفين)، فإن ذلك يسبب **إجهادات داخلية** في المادة.

المعادلة الأساسية للإجهاد الحراري

$$\delta_T = L\alpha\Delta T$$

حيث:

$\boldsymbol{\delta_T} =$ مقدار التمدد الحراري

$\boldsymbol{L} =$ معامل الطول الأصلي للقضيب

$\boldsymbol{\alpha} =$ معامل التمدد الحراري (Coefficient of Thermal Expansion)

$\boldsymbol{\Delta T} =$ التغير في درجة الحرارة

Civilittee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.civilittee-hu.com

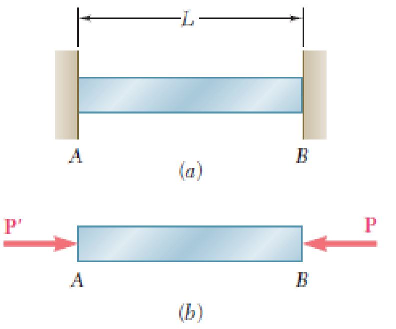
If the temperature of the rod is raised by ΔT, the rod elongates by an amount δT that is proportional to both the temperature change ΔT and the length L of the rod.

عند **رفع درجة حرارة قضيب** بمقدار $\boldsymbol{\Delta T}$ فإنه **يتمدد** بمقدار $\boldsymbol{\delta_T}$ ، وهذا التمدد يكون **متناسبًا مع كل من التغير في درجة الحرارة** $\boldsymbol{\Delta T}$ **وطول القضيب** $\boldsymbol{L}$.

كيف نفهم ذلك؟

1. **كلما زادت درجة الحرارة، زاد التمدد.**
2. **كلما زاد معامل الطول الأصلي، زاد التمدد.**
3. **تختلف قيمة معامل التمدد الحراري باختلاف المادة، حيث تعبر عن مدى حساسية المادة للتغيرات الحرارية.**

problem created by the temperature change DT is statically indeterminate. Therefore, the magnitude P of the reactions at the supports is determined from the condition that the elongation of the rod is zero.



Force P develops when the temperature of the rod increases while end A and B are restrained.

عندما **تتغير درجة حرارة قضيب مثبت من الطرفين ، فإنه يحاول التمدد، لكن التثبيت يمنعه، مما يؤدي إلى توليد إجهادات داخلية وردود فعل في الدعامات.**

لماذا هذا النظام غير محدد استاتيكيًا؟

$\sum F_X = 0\ ,\sum F_Y = 0\ ,\sum M = 0$

1. **في الحالات العادية، نستخدم معادلات الاتزان الاستاتيكي لحساب ردود الأفعال.**
2. **لكن في هذه الحالة، لا تكفي معادلات الاتزان وحدها لأننا لا نعرف مقدار ردود الفعل بدون النظر إلى التشوهات.**
3. **لذلك، نحتاج إلى علاقة هندسية تعبر عن عدم وجود استطالة في القضيب بسبب التثبيت.**

◆ كيف نحدد القوة P في الدعامات؟

بما أن القضيب **لا يمكنه التمدد بسبب التثبيت**، فإن مقدار التمدد الحراري δ_T يجب أن يكون **صفرًا**:

$$\delta_T = 0$$

لكن وفقًا لمعادلة التمدد الحراري:

$$\delta_T = \alpha L \Delta T + \frac{PL}{AE}$$

وبما أن $\delta_T = 0$، نحصل على:

$$0 = \alpha L \Delta T + \frac{PL}{AE}$$

ومنها يمكن حساب القوة P عند الدعامات:

$$P = -AE\alpha\Delta T$$

حيث:

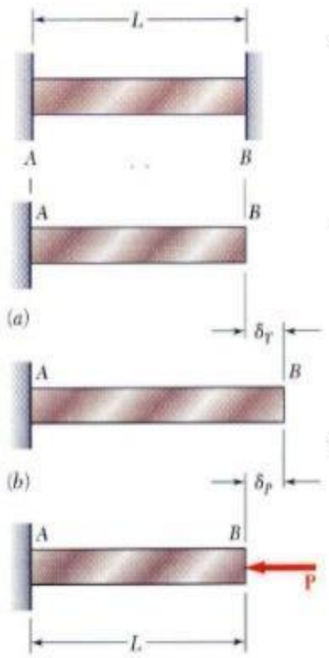
P = القوة الناتجة في الدعامات بسبب التقييد

A = المساحة المقطعية للقضيب

E = معامل المرونة للمادة

α = معامل التمدد الحراري

ΔT = التغير في درجة الحرارة



هو مبدأ في الميكانيكا ينص على **أن الأثر الكلي للقوى أو التأثيرات المختلفة على جسم ما يساوي مجموع تأثيرات كل قوة أو تأثير منفردًا، بشرط أن يكون النظام خطيًا** (أي أن المادة تتبع قانون هوك).

إضافة مهمة من الصورة: **مبدأ التراكب (Superposition Principle)**

1. يتم التعامل مع القيد الإضافي (التثبيت عند الطرف الثاني) على أنه **رد فعل زائد**، ويتم حل المشكلة باستخدام مبدأ التراكب.

2. يتم حساب كل من التشوه الناتج عن التمدد الحراري والتشوه الناتج عن القوة P ثم يتم فرض شرط الاتزان الهندسي بحيث يكون المجموع صفرًا.

التفسير الفيزيائي:

1. إذا زاد ΔT ، فإن القضيب يحاول التمدد، لكن التثبيت يسبب إجهادات ضغط داخلية.

2. إذا نقصت ΔT ، فإن القضيب يحاول الانكماش، لكن التثبيت يسبب إجهادات شد داخلية.

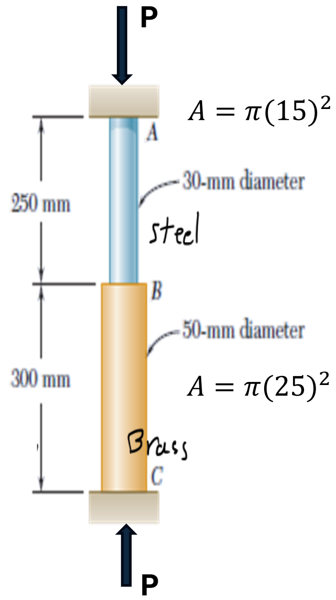
أهمية هذه الفكرة: (معلومة للإطلاع)

1. تستخدم في تصميم **الجسور والأنابيب والهياكل المعدنية** لمراعاة تأثير تغيرات الحرارة.

2. تمنع **التشوهات غير المرغوبة أو الفشل الميكانيكي** في الهياكل المعرضة لدرجات حرارة متغيرة.

EX: A rod consisting of two cylindrical portions *AB* and *BC* is restrained at both ends. Portion *AB* is made of steel **(*Es* = 200 GPa, αs = 11.7 3 10^-6^/C°)** and portion *BC* is made of brass **(*Eb* = 105 GPa, α *b* = 20.9 3 10^-6^/ C°).** Knowing that the rod is initially unstressed, determine the compressive force induced in *ABC* when there is a **temperature rise of 50 C°.**

Key Concept



$$\Delta T = 50\ C^{\circ} \quad , \delta_T = \sum L\alpha\Delta T \rightarrow \delta_s + \delta_b \rightarrow$$

$$\sum\delta_T = \delta_s + \delta_b \rightarrow (\mathbf{11.7\ 3 \times 10^{-6}})(\mathbf{50})(\mathbf{250}) + (\mathbf{20.9\ 3 \times 10^{-6}})(\mathbf{50})(\mathbf{300})$$

$$= \mathbf{0.461\ m} \quad (\boldsymbol{expansion})$$

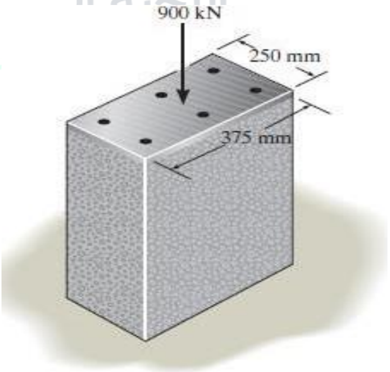
$$\sum\delta_p = \sum\frac{PL}{EA} \rightarrow \frac{(260)(P)}{(200\times10^3)(\pi(15)^2)} + \frac{(300)(P)}{(105\times10^3)(\pi(25)^2)}$$

$$= 3.225 \times 10^{-6} P$$

$$\boldsymbol{\delta_p} = \boldsymbol{\delta_T} \rightarrow 3.225 \times 10^{-6} P = 0.461$$

$$\boldsymbol{P = 142.95\ N}$$

The concrete post is reinforced using six steel reinforcing rods, each having a diameter of **20 mm**. Determine the stress in the concrete and the steel if the post is subjected to an axial load of **900 kN**. **E_c = 25 GPa , Est = 200 GPa.**



Sol:

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad P_{con} + 6P_{st} - 900 = 0$$

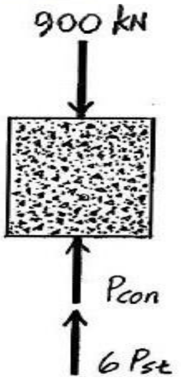
$$\delta_{con} = \delta_{st}$$

$$\frac{P_{con}L}{A_{con}E_{con}} = \frac{P_{st}L}{A_{st}E_{st}}$$

$$\frac{P_{con}\not{L}}{\left[0.25(0.375) - 6(\frac{\pi}{4})(0.02^2)\right]\left[25(10^9)\right]} = \frac{P_{st}\not{L}}{(\frac{\pi}{4})(0.02^2)\left[200(10^9)\right]}$$

ضروري نركز بحساب المساحة هون

$$P_{con} = 36.552\ P_{st}$$



Solving Eqs (1) and (2) yields

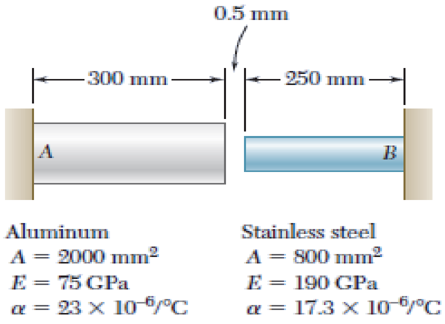
$$P_{st} = 21.15\text{ kN} \qquad P_{con} = 773.10\text{ kN}$$

Thus,

$$\sigma_{con} = \frac{P_{con}}{A_{con}} = \frac{773.10(10^3)}{0.15(0.375) - 6(\frac{\pi}{4})(0.02^2)} = 8.42\text{ MPa}$$

$$\sigma_{st} = \frac{P_{st}}{A_{st}} = \frac{21.15(10^3)}{\frac{\pi}{4}(0.02^2)} = 67.3\text{ MPa}$$

EX: At room temperature **(20C°) a 0.5-mm gap exists** between the ends of the rods shown. At a later time when the temperature has reached **(140 C°),** determine (*a*) **the normal stress in the aluminum rod**, (*b*) **the change in length of the aluminum rod**.



$$\Delta T = 140 - 20 = 120\ C^{\circ}$$
$$\delta_{All} = (23 \times 10^{-6})(120)(300) = 0.828\ mm$$
$$\delta_S = (17.3 \times 10^{-6})(120)(250) = 0.519\ mm$$
$$\delta_T = \delta_{All} + \delta_S - 0.5 = 0.828 + 0.519 - 0.5 = 0.847$$

$$\Sigma\delta_p = \Sigma\frac{PL}{EA} = \underbrace{\frac{(300)(P)}{(75 \times 10^3)(2000)}}_{\delta_{All}} + \underbrace{\frac{(250)(P)}{(190 \times 10^3)(800)}}_{\delta_S}$$
$$3.6447 \times 10^{-6}P = 0.847$$
$$\boldsymbol{P = 232.44\ kN}$$

$$\sigma_{All} = \frac{P}{A} \rightarrow \frac{232.44 \times 10^3}{2000} = 116.22\ Mpa$$
$$\delta_{All=}\delta_T - \delta_S = (23 \times 10^{-6})(120)(300) - \frac{(300)(232.44 \times 10^3)}{(75 \times 10^3)(2000)}$$
$$\delta_{All} = 0.828 - 0.465 = \boldsymbol{0.363mm}$$

4.7 STRESS CONCENTRATIONS (تركيز الإجهادات)

اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civilittee-HU.com

ما هو؟

هو ظاهرة تحدث عندما يكون هناك تغير مفاجئ في شكل أو مقطع المادة، مما يؤدي إلى زيادة كبيرة في الإجهادات في تلك المنطقة مقارنة بالإجهادات في بقية الجسم.

كيف يتم حسابه؟

تم التعبير عن تركيز الإجهادات بواسطة معامل تركيز الإجهاد K ، والذي يعرف بالعلاقة:

$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ave}}$$

σ_{max} ← هو الإجهاد الأقصى في المنطقة الحرجة.

σ_{ave} ← هو الإجهاد المثالي أو المتوسط الذي يتم حسابه بافتراض أن الحمل موزع بشكل متساوٍ على المقطع العرضي.

To determine the maximum stress occurring near a discontinuity in a given member subjected to a given axial load P, the designer needs to compute the average stressσ = P/A in the critical section and multiply the result obtained by the appropriate value of the stress- concentration factor K.

عندما يكون هناك **عدم تجانس في المقطع** (مثل فتحة، شق، زاوية حادة، أو تغير مفاجئ في الشكل)، فإن **الإجهاد لا يكون موزعًا بالتساوي. بل يتركز في بعض المناطق، مما يزيد من خطر حدوث الكسر أو الفشل.**

لذلك، لحساب **الإجهاد الأقصى في تلك المنطقة، نتبع الخطوات التالية:**

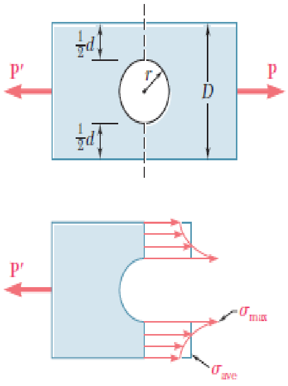
1 حساب الإجهاد الاسمي (Nominal Stress):

$$\frac{P}{A} = \sigma$$

حيث:

P هو الحمل المحوري المطبق.

A هي مساحة المقطع العرضي عند النقطة الحرجة.

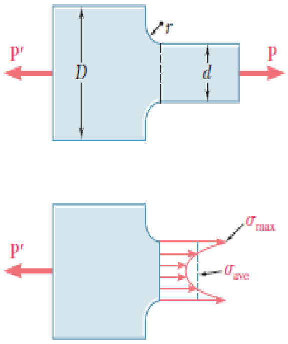


Stress distribution near circular hole in flat bar under axial loading.

2 ضرب الإجهاد الاسمي في معامل تركيز الإجهاد K_t:

$$\sigma_{max} = K_t \times \sigma$$

حيث K_t هو معامل تركيز الإجهاد، والذي يعتمد على شكل العيب الهندسي ويتم تحديده من الجداول أو المخططات التجريبية.



Stress distribution near fillets in flat bar under axial loading.

لماذا هذه الخطوة مهمة؟

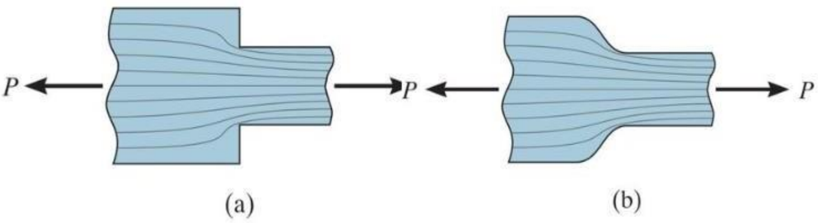
لأن **الإجهاد الفعلي** في المناطق ذات التغير المفاجئ في الشكل يكون أعلى بكثير من الإجهاد الاسمي، وإذا لم يأخذ المصمم ذلك بعين الاعتبار، فقد يؤدي ذلك إلى **كسر مفاجئ** للقطعة.

اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
.Civilittee-HU.com

Reduction of Stress Concentration (طرق تقليل تركيز الإجهاد)

* Avoid abrupt and/or large-magnitude changes in cross section.

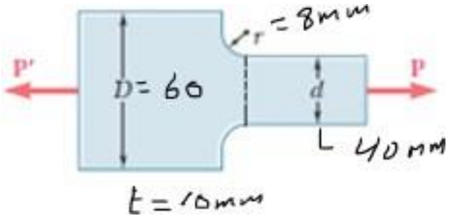
* Avoid sharp corners using round and fillet.



في الشكل(a) : يوجد **تغيير مفاجئ** في المقطع العرضي مع **زوايا حادة**، مما يؤدي إلى **زيادة تركيز الإجهاد** في هذه المناطق.

في الشكل(b) : تم **تنعيم الانتقال بين المقطعين** باستخدام **زوايا دائرية، مما يقلل بشكل كبير من تركيز الإجهاد.**

EX: Determine the largest axial load **P** that can be safely supported by a flat steel bar consisting of two portions, both 10 mm thick and, respectively, **40 and 60 mm wide**, connected by fillets of **radius *r* = 8 mm**. Assume an allowable **normal stress of 165 MPa**.



$$\frac{r}{d} = \frac{8}{40} = 0.2$$ ⟶ منها بتعرف ال **x-axis**

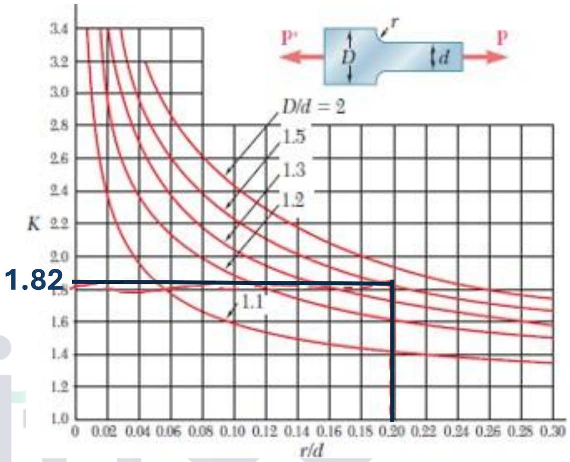
$$\frac{D}{d} = \frac{60}{40} = 1.5$$ ⟶ منها بتعرف أي خط رح تعتمد بالجدول.

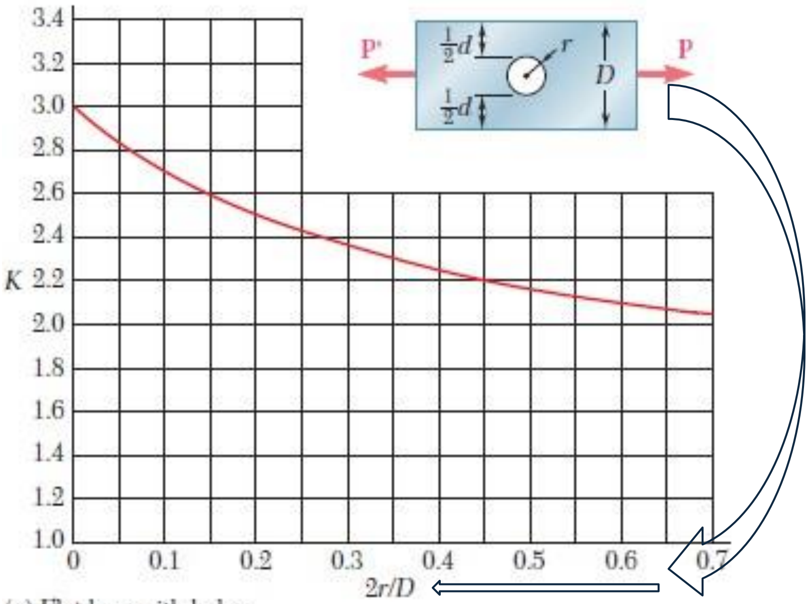
من الجدول

$$\boldsymbol{K = 1.82}$$

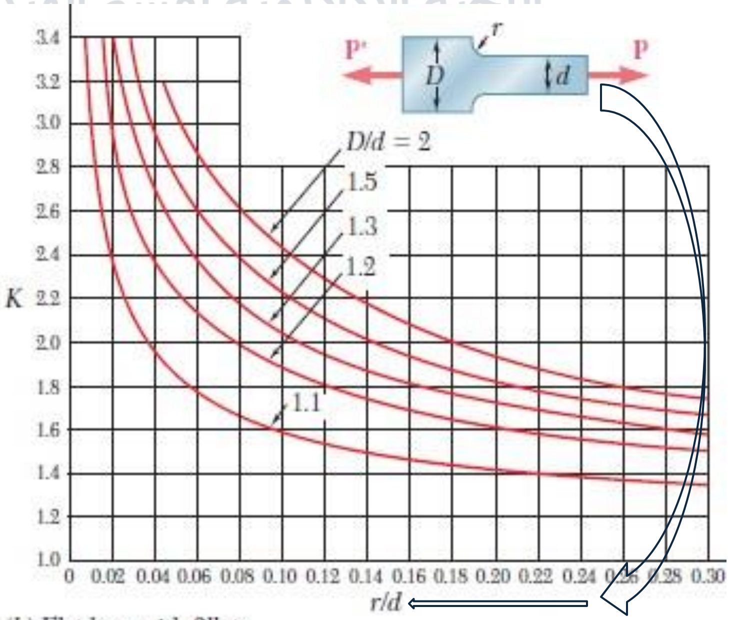
$$\sigma = K\frac{P}{A} = 165 = (1.82)\frac{P}{(40)(10)}$$

$$\boldsymbol{P = 36263.7 = 36.3\ kN}$$





(*a*) Flat bars with holes

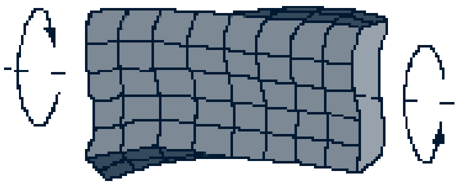


(*b*) Flat bars with fillets

Stress concentration factors for flat bars under axial loading. Note that the average stress must be computed across the narrowest section: $\sigma_{ave} = P/td$, where *t* is the thickness of the bar. (Source: W. D. Pilkey and D.F. Pilkey, *Peterson's Stress Concentration Factors*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 2008.)

CHAPTER 5

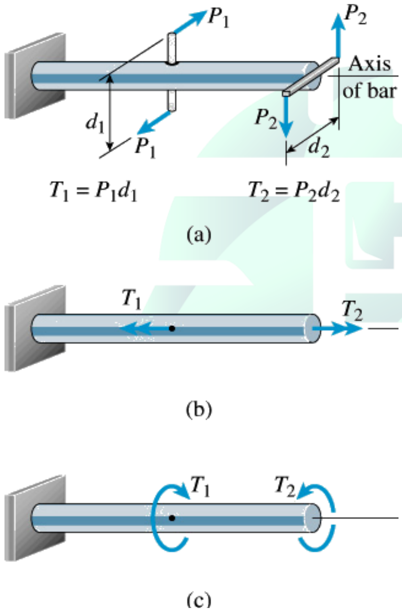
Torsion

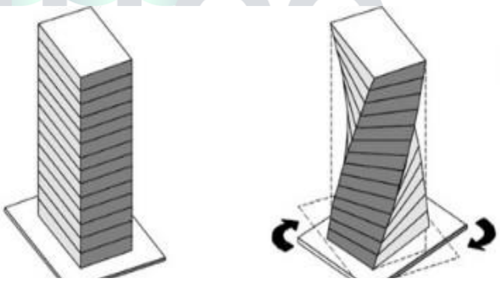


Introduction

This is for understanding only.

Torque (T) is a type of **moment** that causes an object to **twist or rotate** around an axis. It is commonly seen in applications like rotating shafts, wrenches, and gears. **(N.m)**





Civilittee
ملتقى طلبة الهندسة المدنية
www.Civilittee

5.1 TORSIONAL DEFORMATION OF A CIRCULAR SHAFT (التشوه الالتوائي للعمود الدائري)

عند تطبيق **عزم دوران T على عمود دائري، فإنه يتعرض إلى التواء (Torsion)، مما يؤدي إلى تشوه زاوي في المقطع العرضي للعمود.**

Angle of twist (Φ) is defined as the rotation of a radial line from a fixed end to a cross section some distance x from the end.

هي مقدار دوران خط شعاعي من الطرف المثبت للعمود إلى أي مقطع عرضي يقع على بعد مسافة x من هذا الطرف بسبب **عزم الدوران المطبق.**

الافتراضات الأساسية في التواء الأعمدة الدائرية:

1. The longitudinal axis of the shaft remains straight (يبقى المحور الطولي للعمود مستقيمًا).

هذا يعني أن العمود لا ينحني أثناء الالتواء، بل يحدث الالتواء حول محوره فقط.

2. The shaft does not increase or decrease in length (لا يزيد أو ينقص طول العمود) .

عندما يتعرض العمود لعزم دوران، فإن طوله يظل ثابتًا، أي لا يحدث تمدد أو انكماش في الاتجاه الطولي.

3. Radial lines remain straight and radial as the cross section rotates (تبقى الخطوط الشعاعية مستقيمة وشعاعية عند دوران المقطع العرضي).

أي أن أي خط مرسوم من مركز المقطع العرضي إلى حافته يبقى مستقيمًا أثناء الدوران ولا ينحني.

4. Cross sections rotate about the axis of the member (تدور المقاطع العرضية حول محور العمود) .

بمعنى أن الالتواء يحدث كدوران للمقاطع العرضية حول المحور الطولي للعمود دون أي تشوه جانبي أو تغير في شكل المقطع العرضي.

اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civilittee-HU.com

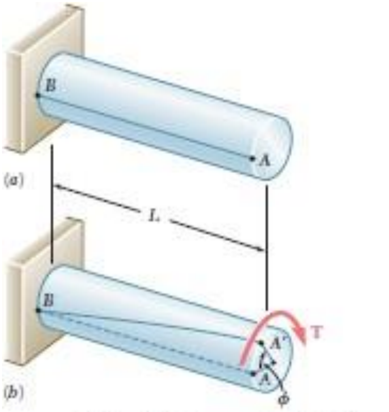
The right end will rotate with respect to the left end of the bar. **The angle of rotation = Angle of twist ϕ.** It changes along the length L of the bar linearly.

- عند تعرض العمود لعزم دوران (Torque) ، فإن **نهايته اليمنى ستدور نسبةً إلى نهايته اليسرى**، وهذا الدوران يُعرف بـ **زاوية الالتواء (Φ) .**

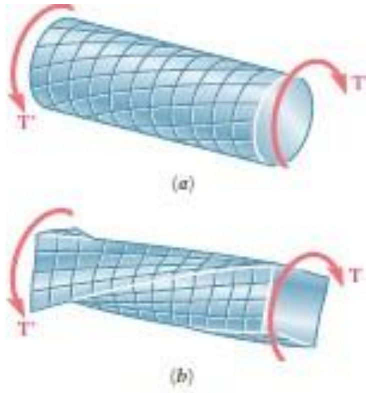
- تتغير زاوية الالتواء **بشكل خطي** على طول العمود إذا كان العزم المطبق ثابتًا، أي أن مقدار الالتواء يزداد تدريجيًا مع الانتقال من نقطة إلى أخرى على طول العمود.

- بمعنى آخر، إذا أخذنا مقطعًا عرضيًا في أي نقطة على طول العمود، فإنه سيدور حول محور العمود ولكن **دون أن يفقد استقامته**، مما يعني أن الخطوط الشعاعية في المقطع العرضي ستبقى مستقيمة أثناء دورانها.

- كما أن طول العمود **لا يتغير** أثناء الالتواء، بل يبقى ثابتًا، ولكن كل مقطع عرضي يدور قليلاً حول محور العمود، مما يسبب تشوهًا التوائيًا متزايدًا على طول العمود.



Shaft with fixed support and line AB drawn showing deformation under torsion loading: (a) unloaded; (b) loaded

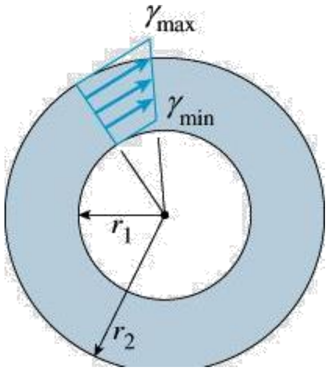


Comparison of deformations in (a) circular and (b) square shafts.

Shearing strain :

Shear strains in a circular tube (إجهاد القصفي عمود دائري تحت تأثير الالتواء).

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L} = \frac{r\phi}{L}$$



γ = إجهاد القص (Shear strain) ، وهو مقدار التشوه الزاوي الناتج عن الالتواء.

ρ= نصف القطر للموقع المدروس داخل العمود.

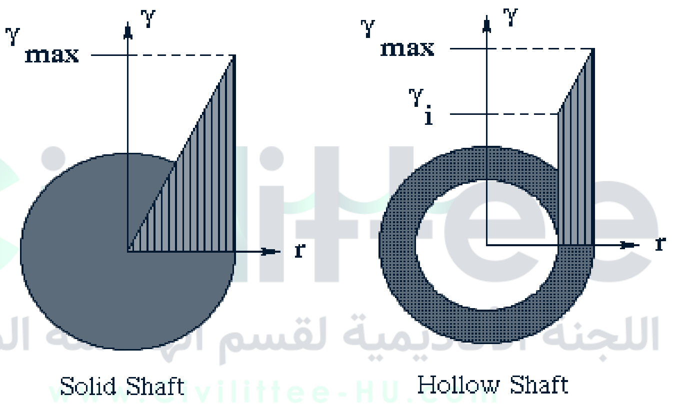
ϕ= زاوية الالتواء الكلية للعمود (بالراديان).

L = طول العمود.

The max & min shear strains are

$$\gamma_{max} = \frac{r_2\Phi}{L}$$

$$\gamma_{min} = \frac{r_1\Phi}{L}$$



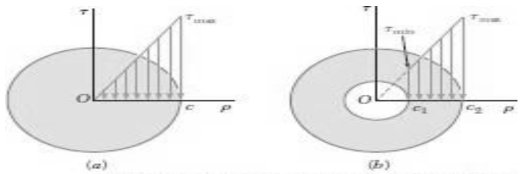
5.2 Torsion Formula (معادلة الالتواء)

تعبر **معادلة الالتواء** عن العلاقة بين العزم الملتوي والخصائص الهندسية والمادية للعمود الدائري تحت تأثير الالتواء، وهي تعطى بالشكل التالي:

$$\tau = G\gamma$$

When the torque **T** is such that all shearing stresses in the shaft remain below the yield strength , the stresses in the shaft will remain below both the proportional limit and the elastic limit. Thus, Hooke's law will apply, and there will be no permanent deformation.

عندما يكون العزم المطبق على العمود بحيث تبقى الإجهادات القصية دون حد القوة أو العزم (أي دون تجاوز قوة الخضوع للمادة)، فإن الإجهادات ستبقى أقل من كل من الحد النسبي (proportional limit) وحد المرونة (elastic limit) في هذه الحالة، ستتصرف المادة بشكل مرن، وبالتالي سيظل قانون هوك ساريًا على الإجهادات القصية. في هذه المنطقة المرنة، ستعود المادة إلى شكلها الأصلي بعد إزالة الحمل المطبق، مما يضمن عدم حدوث تشوه دائم.



Distribution of shearing stresses in a torqued shaft: (a) Solid shaft, (b) Hollow shaft.

The Torsion Formula

$$\tau = \frac{Tr}{J}$$

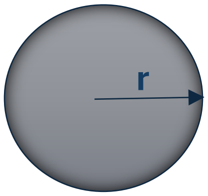
τ = هو الإجهاد القصي في نقطة معينة على سطح العمود.

T = هو العزم المطبق على العمود.

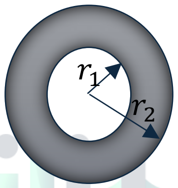
r = هو المسافة من محور العمود إلى النقطة التي نحسب فيها الإجهاد (أي نصف القطر عند السطح).

J = هو العزم القطبي للمساحة (polar moment of inertia) للعمود، وهو يعبر عن توزيع المادة في العمود بالنسبة للمحور المركزي.

حالات ال J:

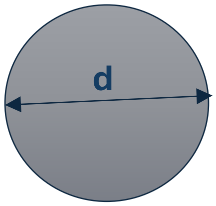


$$J = \frac{\pi(r)^4}{2}$$

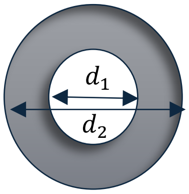


$$J = \frac{\pi((r_2)^4 - (r_1)^4)}{2}$$

Civiliftee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civiliftee-HU.com

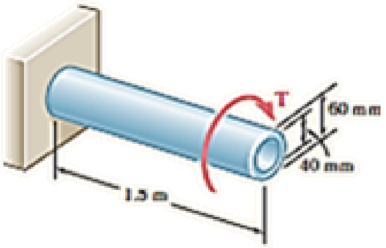


$$J = \frac{\pi(d)^4}{32}$$



$$J = \frac{\pi((d_2)^4 - (d_1)^4)}{32}$$

EX: What is **<u>the largest torque</u>** that can be applied to the shaft **if the shearing stress is not to exceed 120 MPa**. What is the corresponding minimum value of the shearing stress in the shaft.

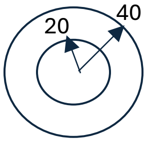


$\tau = 120\ Mpa$

$$\tau_{max} = \frac{Tr}{J}$$

$$120 = \frac{(T)(30)}{1.02 \times 10^6} \Rightarrow T = 4.08 \times 10^6 N.mm = 4.08\ kN.m$$

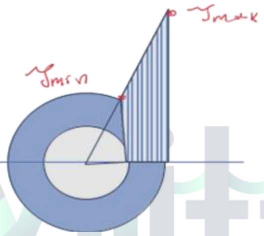
$$\tau_{min} = \frac{Tr_2}{J} = \frac{(4.08 \times 10^6)(20)}{1.02 \times 10^6} = 80\ Mpa$$



Note:

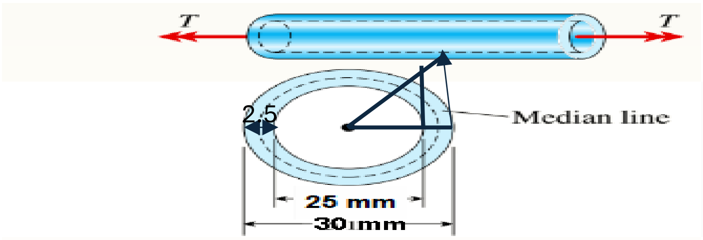
<u>the largest torque</u>$\Rightarrow \boldsymbol{\tau_{max}} \Rightarrow \boldsymbol{r_{max}}$

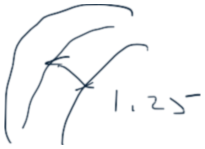
<u>the minimum torque</u>$\Rightarrow \boldsymbol{\tau_{min}} \Rightarrow \boldsymbol{r_{min}}$



$$\boldsymbol{J = \frac{\pi(30^4 - 20^4)}{2} = 1.02 \times 10^6}$$

A circular tube is subjected to torque T at its ends. The resulting maximum shear strain in the tube is 0.005. Calculate <u>the minimum shear</u> strain in the tube and <u>the shear strain at the median line</u> of the tube section.





$\gamma_{max} = 0.005$

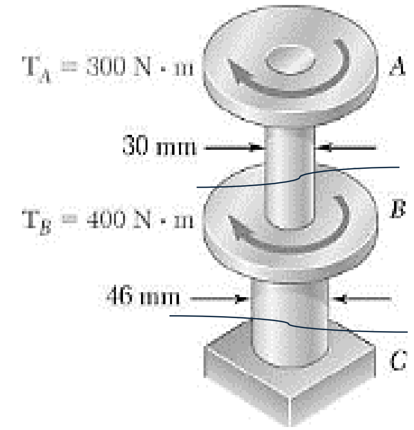
$\gamma_{min} \Rightarrow ??$

$$\gamma = \frac{r\phi}{L} \Rightarrow \gamma_{min} = \frac{r_i \gamma_{max}}{r_\circ} = \frac{(12.5)(0.005)}{15} = 0.0042$$

At The Mdian Line

$$\gamma_{med} = \frac{r_{med}\gamma_{max}}{r_\circ} = \frac{(12.5 + 12.5)(0.005)}{15} = 0.00458$$

EX: The torques shown are exerted on pulleys A and B. Knowing that both shafts are solid, **determine the maximum shearing stress** (a) in shaft AB,(b) in shaft BC.



(a) Shaft *AB*: $T_{AB} = 300\ \text{N}\cdot\text{m},\ d = 0.030\ \text{m},\ c = 0.015\ \text{m}$

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} = \frac{2T}{\pi c^3} = \frac{(2)(300)}{\pi(0.015)^3}$$

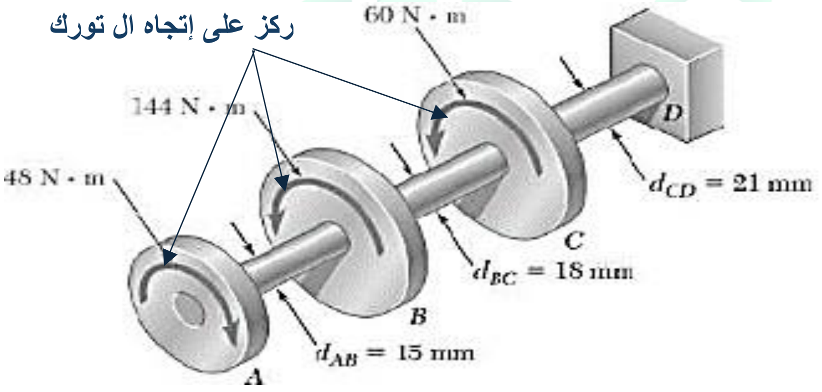
$$= 56.588 \times 10^6\ \text{Pa} \qquad \tau_{max} = 56.6\ \text{MPa}$$

(b) Shaft *BC*: $T_{BC} = 300 + 400 = 700\ \text{N}\cdot\text{m}$

$d = 0.046\ \text{m},\ c = 0.023\ \text{m}$

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} = \frac{2T}{\pi c^3} = \frac{(2)(700)}{\pi(0.023)^3}$$

$$= 36.626 \times 10^6\ \text{Pa} \qquad \tau_{max} = 36.6\ \text{MPa}$$



Knowing that an 8-mm-diameter hole has been drilled through each of the shafts *AB*, *BC*, and *CD*, determine (*a*) the shaft in which the maximum shearing stress occurs, (*b*) the magnitude of that stress.

Shaft AB

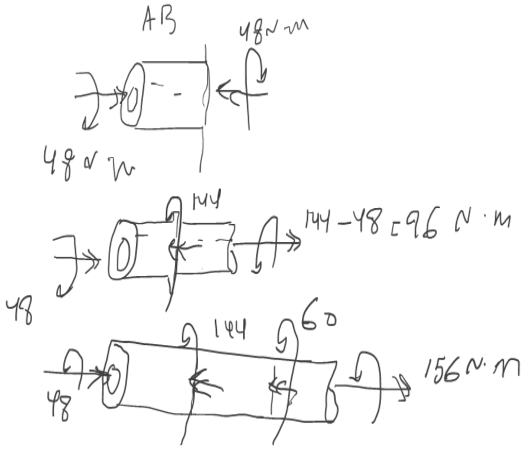
$$\tau_{max} = \frac{(48000)(7.5)}{\frac{(\pi)(7.5^4 - 4^4)}{2}} = 78.8\ Mpa$$

Shaft BC

$$\tau_{max} = \frac{(96000)(9)}{\frac{(\pi)(9^4 - 4^4)}{2}} = 87.3\ Mpa$$

Shaft CD

$$\tau_{max} = \frac{(156000)(10.5)}{\frac{(\pi)(10.5^4 - 4^4)}{2}} = 87.64\ Mpa \longrightarrow \textbf{Max}$$

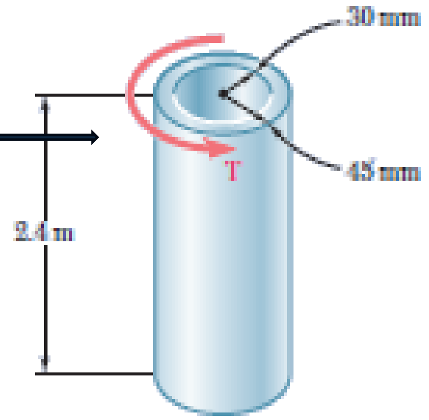


EX :Determine the torque **T** that causes a **maximum shearing stress of 45 MPa** in the hollow cylindrical steel shaft shown. (*b*) Determine the maximum shearing stress caused by the same torque **T** in a solid cylindrical shaft of **the same cross- sectional area**.

$a)$ ***the torque that causes a maximum shearing stress***

$$\tau_{max} = \frac{Tr}{J} \Rightarrow 45 = \frac{(T)(45)}{\mathbf{5168901.7}} \qquad J = \frac{\pi((45)^4 - (30)^4)}{32} = \mathbf{5168901.7}\ mm^4$$

$$\boldsymbol{T = 5.1689\ kN.m}$$

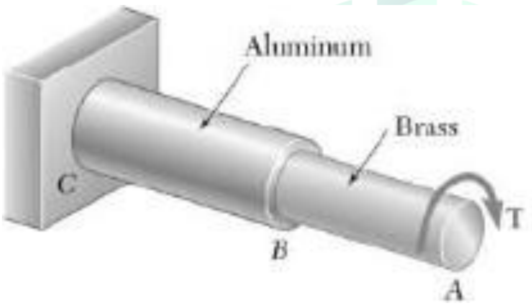


$b)$ ***solid shaft of the same area***

$$A_{before} = A_{after} \Rightarrow \pi(45)^2 - (30)^2) = \pi r^2$$

$$r = 33.541\ mm \Rightarrow J_{new\ solid} = \frac{\pi \times (33.541)^4}{2} = 1988034.44\ mm^4$$

$$\tau = \frac{Tr}{J} \Rightarrow \frac{(5.1689 \times 10^6)(33.541)}{1988034.44} = \mathbf{87.21\ Mpa}$$



The allowable stress is 50 MPa in the brass rod *AB* and 25 MPa in the aluminum rod *BC*. Knowing that a torque of magnitude $T = 1250$ N · m is applied at *A*, determine the required diameter of (*a*) rod *AB*, (*b*) rod *BC*.

Brass

$$\tau = \frac{Tr}{J} \Rightarrow 50 = \frac{(1250 \times 10^3)(r)}{(\pi)(r)^4/2} \Rightarrow \boldsymbol{r = 25.16\ mm}$$

$$\boldsymbol{d_{AB} = 50.3\ mm}$$

Alaminum

$$\tau = \frac{Tr}{J} \Rightarrow 25 = \frac{(1250 \times 10^3)(r)}{(\pi)(r)^4/2} \Rightarrow \boldsymbol{r = 31.69\ mm}$$

$$\boldsymbol{d_{BC} = 63.4\ mm}$$

Shaft of variable cross section or for a shaft subjected to torques at locations other than its ends.

عندما يكون العمود **غير منتظم** في الشكل، أي أن مقطعه العرضي **يتغير** على طوله، أو عند تعرضه **لعزوم التواء في مواقع متعددة** وليس فقط عند الأطراف، فإن **زاوية الالتواء الكلية** تُحسب بتقسيم العمود إلى **أجزاء صغيرة** ذات مقاطع منتظمة ثم جمع التأثيرات لكل جزء.

التفسير:

1- عندما يتغير المقطع العرضي، فإن J سيكون مختلفًا عند كل جزء، مما يعني أن توزيع الإجهاد والانفعال سيتغير على طول العمود.

2- عندما تُطبق عزوم التواء في مواقع متعددة، فإن كل جزء من العمود سيتعرض لدوران مختلف، وبالتالي زاوية الالتواء الكلية هي مجموع الزوايا الجزئية لكل جزء.

3- يتم التعامل مع كل جزء كأنه عمود منفصل ثم يتم جمع الزوايا الجزئية للحصول على زاوية الالتواء الكلية.

Shaft with variable cross section. (a) With applied torques and section S. (b) Free-body diagram of sectioned shaft.

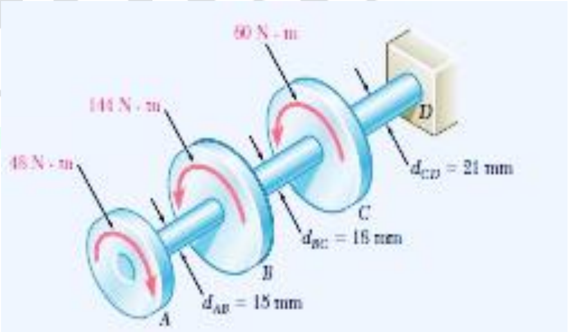
EX: Knowing that each of the shafts *AB*, *BC*, and *CD* consist of a solid circular rod, determine (*a*) **the shaft in which the maximum shearing stress occurs.**

$$\tau_{AB} = \frac{Tr}{J} \Rightarrow \frac{(48000)(7.5)}{(\pi)(7.5)^4/2} = 72.43\ Mpa$$

$$\tau_{BC} = \frac{Tr}{J} \Rightarrow \frac{(96000)(9)}{(\pi)(9)^4/2} = 83.83\ Mpa$$

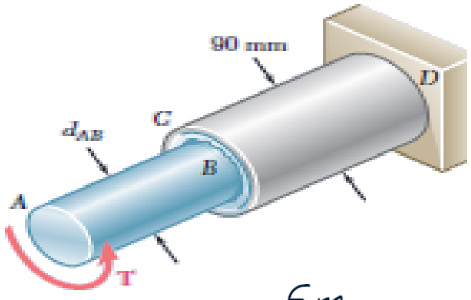
$$\tau_{CD} = \frac{Tr}{J} \Rightarrow \frac{(15600)(10.5)}{(\pi)(10.5)^4/2} = 85.79\ Mpa$$

Max in shaft CD



$$T_{AB} = 46\ N.m$$
$$T_{BC} = 144 - 46 = 96\ N.m$$
$$T_{CD} = 144 + 60 - 48 = 156\ N.m$$

EX:The solid rod *AB* has a diameter $\boldsymbol{d_{AB}}$ **= 60 mm** and is made of a steel for which the allowable **shearing stress is 85 MPa.** The pipe *CD*, which has an **outer diameter of 90 mm** and a wall **thickness of 6 mm**, is made of an aluminum for which the **allowable shearing stress is 54 MPa**. Determine the **largest** **torque T that can be applied at *A*.**



In AB

$$\tau = \frac{Tr}{J} \Rightarrow 85 = \frac{(T)(30)}{(\pi)(30)^4/2}$$

$$\boldsymbol{T = 3.603\ kN.m}$$

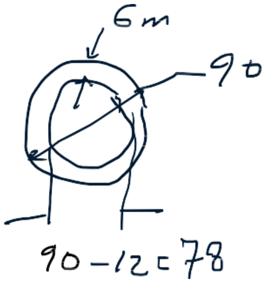
In CD

$$\tau = \frac{Tr}{J} \Rightarrow 54 = \frac{(T)(45)}{2807302.06}$$

$$\boldsymbol{T = 3.3688\ kN.m}$$

Take The Smaller

تم استخدام أصغر عزم تم حسابه لأنه يعكس الحد الأدنى للتحمل، وهو ما يضمن سلامة العنصر وتجنب الفشل تحت الحمولة المعينة.



بال Hollow

Inear diameter = (outer diameter) – 2(thickness)

$$\leftrightarrow ID = (60) - \big(2(6)\big) = 78mm$$

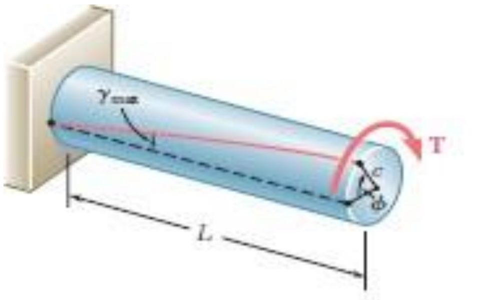
Civilittee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civilittee-HU.com

5.4 ANGLE OF TWIST (زاوية الالتواء)

هي مقدار الدوران الذي يحدث في مقطع من العمود نتيجة تعرضه لعزم التواء **(T)** يمكن حساب زاوية الالتواء باستخدام المعادلة التالية:

$$\phi = \frac{TL}{GJ}$$

ϕ is in radians.



Torque applied to fixed end shaft resulting in angle of twist ϕ.

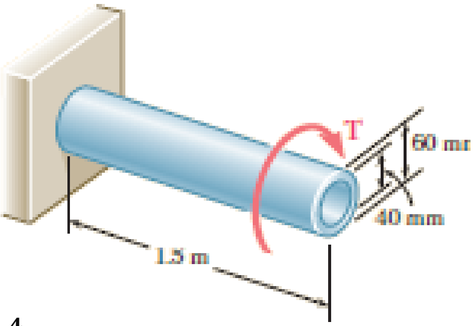
شرح المعادلة:

- **Φ** = زاوية الالتواء (بالراديان).
- **T** = عزم الالتواء المطبق على العمود (N·m).
- **L** = طول العمود (m).
- **G** = معامل القص للمادة (Pa).
- **J** = عزم العطالة القطبي للمقطع العرضي (m^4).

التفسير:

- كلما زاد **عزم الالتواء (T)** أو **طول العمود (L)**، زادت زاوية الالتواء.
- كلما زاد **معامل القص (G)** أو **عزم العطالة القطبي (J)**، قلت زاوية الالتواء، مما يعني أن المواد الأكثر صلابة أو الأعمدة ذات الأقطار الأكبر **مقاومة أكثر للالتواء.**
- زاوية الالتواء **تتغير خطيًا** مع طول العمود، أي أن المقطع البعيد عن نقطة التثبيت سيلتوي أكثر من المقطع القريب.

EX: What torque should be applied to the end of the, to produce a **twist of 2°**?
Use the value ***G* = 77 GPa** for the modulus of rigidity of steel.



Hollow, fixed-end shaft having torque T applied at end.

ϕ is in radians.

$$\phi = \frac{2\times\pi}{180} = \mathbf{0.03491\ rad}$$

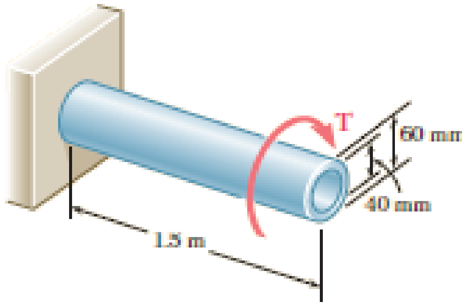
$$\phi = \frac{TL}{GJ} \Rightarrow 0.03491 = \frac{(T)(1.5\times 1000)}{(77000)(1021017.6)}$$

$$\boldsymbol{T = 18.297\ kN.m}$$

$$\boldsymbol{J} = \frac{\pi((\mathbf{60})^4 - (\mathbf{40})^4)}{32} = \mathbf{1021017.6\ mm^4}$$

EX: What **angle of twist** will create a shearing stress **of 70 MPa** on the inner surface of the hollow steel shaft. Determine the angle of twist ϕ corresponding to the value of T, ***G= 77 GPa.***

$$\tau = \frac{Tr}{J} \quad , \quad \phi = \frac{TL}{GJ}$$



Hollow, fixed-end shaft having torque T applied at end.

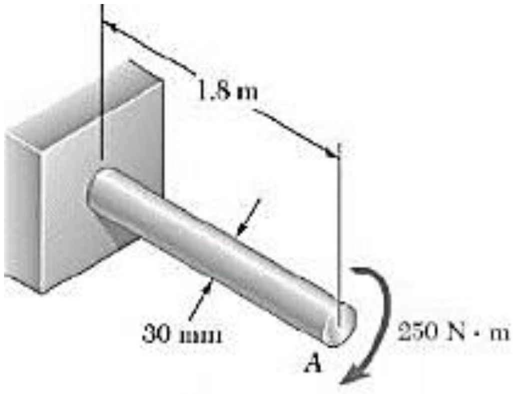
$$\tau = \frac{Tr}{J} \Rightarrow 70 = \frac{(20)(T)}{1021017.6}$$

$$T = 3573561.6\ N.mm$$

$$\phi = \frac{TL}{GJ} = \frac{(3573561.6)(1.5\times 10^3)}{(77000)(1021017.6)} = 0.0682\ rad$$

$$\phi = 0.0682\ rad = 0.0682\ \frac{180}{\pi} = 3.91^\circ$$

$$J = \frac{\pi((60)^4 - (40)^4)}{32} = 1021017.6\ mm^4$$



(*a*) For the solid steel shaft shown (G = 77 GPa), determine the angle of twist at A. (*b*) Solve part *a*, assuming that the steel shaft is hollow with a 30-mm-outer diameter and a 20-mm-inner diameter.

$$\phi = \frac{TL}{GJ} = \frac{(250\times 10^3)(1.8\times 1000)}{\pi((15)^4)(77000)} = 0.074\ rad = 4.21^\circ$$

If the shaft is hollow

$$\phi = \frac{TL}{GJ} = \frac{(250\times 10^3)(1.8\times 1000)}{\pi(\frac{(15)^4 - (10)^4}{2})(77000)} = 0.0916\ rad = 5.25^\circ$$

If the shaft is subjected to torques at locations other than its ends or if it has several portions with various cross sections and possibly of different materials, it must be divided into parts.

إذا تعرض العمود لعزوم التواء **في مواقع مختلفة** على طوله، أو إذا كان **يتكون من عدة أجزاء** ذات مقاطع عرضية مختلفة وربما من مواد مختلفة، فيجب **تقسيمه إلى أجزاء** بحيث يتم تحليل كل جزء بشكل منفصل.

$$\boldsymbol{\phi_{Total} = \sum \frac{TL}{GJ}}$$

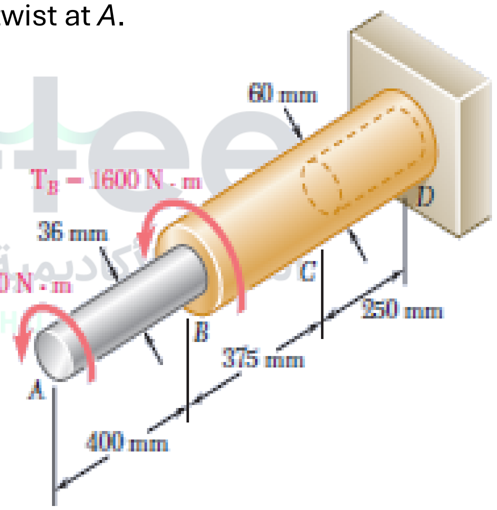
لماذا يتم تقسيم العمود؟

1- عند اختلاف **المادة**، يكون لكل جزء معامل قص G مختلف، مما يعني أن استجابته للالتواء تختلف.

2- عند اختلاف **المقطع العرضي**، فإن J يتغير، مما يؤثر على مقدار الالتواء.

3- عند وجود **عزوم مختلفة** على طول العمود، يجب تحليل تأثير كل عزم على الأجزاء المتأثرة به.

EX: The aluminum rod *AB* **(*G* = 27 GPa)** is bonded to the brass rod *BD* **(*G* = 39 GPa).** Knowing that portion *CD* of the brass rod is hollow and has an **inner diameter of 40 mm**, determine the angle of twist at *A*.

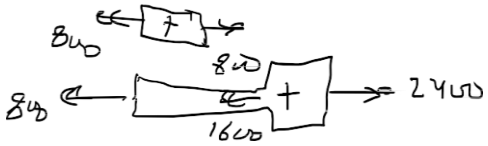


$$\phi_{AB} = \frac{(800)(400)(1000)}{(27\times 10^3)\left(\frac{\pi(36)^4}{32}\right)} = \mathbf{0.0719\,rad}$$

$$\phi_{BC} = \frac{(2400)(375)(1000)}{(39\times 10^3)\left(\frac{\pi(60)^4}{32}\right)} = \mathbf{1.815\times 10^{-2}\,rad}$$

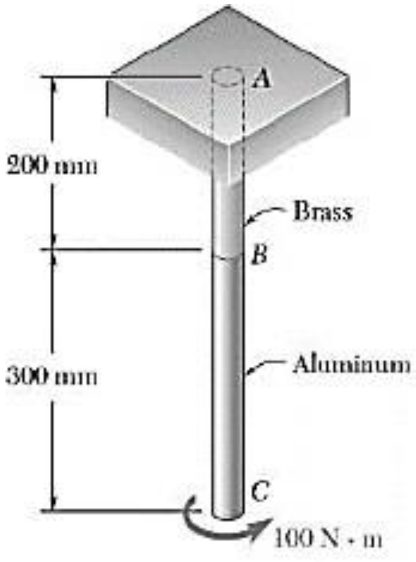
$$\phi_{CD} = \frac{(2400)(250)(1000)}{(39\times 10^3)\left(\frac{\pi((60)^4-(40)^4)}{32}\right)} = \mathbf{1.5076\times 10^{-2} rad}$$

Hollow outer-inner



$$\boldsymbol{\phi_A} = \sum\phi = (0.105)\frac{180}{\pi} = \mathbf{6.02^\circ}$$

Civilittee

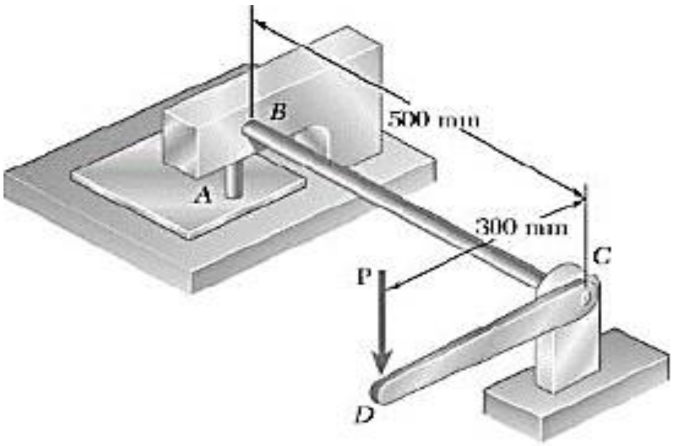


The aluminum rod BC (G = 26 GPa) is bonded to the brass rod AB (G = 39 GPa). Knowing that each rod is solid and has a diameter of 12 mm, determine the angle of twist (*a*) at B, (*b*) at C.

$$\phi_{BA} = \frac{(10000)(200)}{(39 \times 10^3)\left(\frac{\pi(6)^4}{2}\right)} = \mathbf{0.252\ rad = 14.43^\circ}$$

$$\boldsymbol{\phi_{CA} = \phi_{BA} + \phi_{CB}}$$

$$\Rightarrow 0.25 + \frac{(300)(10000)}{(26 \times 10^3)\left(\frac{\pi(6)^4}{2}\right)} \Leftrightarrow 0.25 + 0.567 = \mathbf{0.817\ rad = 46.8^\circ}$$



A hole is punched at A in a plastic sheet by applying a 600-N force **P** to end D of lever CD, which is rigidly attached to the solid cylindrical shaft BC. Design specifications require that the displacement of D should not exceed 15 mm from the time the punch first touches the plastic sheet to the time it actually penetrates it. Determine the required diameter of shaft BC if the shaft is made of a steel with G = 77GPa and τ_{all} = 80 MPa.

$$T = (600)(300) = \mathbf{180 \times 10^3\ N.mm}$$

$$\phi_{all} = \frac{15}{300} = \mathbf{0.05\ rad}$$

يتم اختيار القيمة **الأكبر** لضمان عدم تجاوز الإجهاد المسموح به

Allowable Stress

$$\tau = \frac{Tr}{J} \Rightarrow 80 = \frac{(180 \times 10^3)(r)}{(\pi)(r)^4/2} \Rightarrow \mathbf{r = 11.27\ mm} \Leftrightarrow \mathbf{d = 22.54\ mm}$$

Allowable ϕ

$$\phi = \frac{TL}{GJ} \Rightarrow 0.05 = \frac{(180000)(500)}{(77 \times 10^3)\left(\frac{\pi(d)^4}{32}\right)} \Leftrightarrow \mathbf{d = 22.1\ mm}$$

متى نختار القطر الأكبر؟

لدينا **شرطان** يجب تحقيقهما عند اختيار القطر:

1. إجهاد القص يجب أن لا يتجاوز الحد المسموح به τ_{all}.
2. زاوية الالتواء يجب أن لا تتجاوز الحد المسموح به θ.

كيف نحدد القطر المناسب؟

- **إذا اخترنا القطر الأصغر** $d = 22.1$ mm، فإننا نحقق شرط زاوية الالتواء ولكن قد يكون إجهاد القص أكبر من الحد المسموح.
- **إذا اخترنا القطر الأكبر** $d = 22.54$ mm، فإننا نضمن أن كلًا من إجهاد القص وزاوية الالتواء ضمن الحدود الآمنة.

القاعدة العامة:

يجب أن يكون القطر المختار هو الأكبر بين القيمتين المحسوبتين لأن أي تقليل في القطر سيؤدي إلى زيادة الإجهاد القصي، مما قد يؤدي إلى الفشل الميكانيكي للعمود.

✅ **إذن، القطر النهائي المختار هو** $d = 22.54$ mm **لضمان عدم تجاوز إجهاد القص المسموح به.**

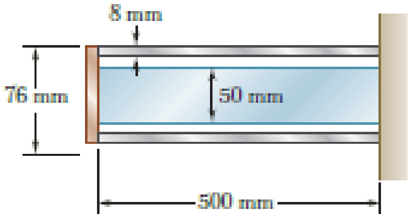
5.5 STATICALLY INDETERMINATE SHAFTS (الاعضاء المعرضة لعزم التواء غير القابل للتحليل استاتكيا)

في بعض المسائل الهندسية، قد لا يكون من الممكن تحليل العزوم الداخلية باستخدام معادلات التوازن فقط، بل نحتاج إلى علاقات إضافية تتعلق بتشوه المواد. هذه الحالات تُعرف باسم **"المسائل غير القابلة للتحليل استاتيكيًا"** أو **Statically Indeterminate Systems**.

متى يكون النظام غير قابل للتحليل استاتيكيًا؟

يحدث ذلك عندما يكون عدد المجاهيل (مثل ردود الأفعال أو العزوم الداخلية) أكبر من عدد معادلات التوازن المتاحة. في هذه الحالة، نحتاج إلى استخدام **معادلة التشوه** جنبًا إلى جنب مع **معادلة التوازن** لحل المسألة.

EX : A steel shaft and an aluminum tube are connected to a fixed support and to a rigid disk as shown in the cross section. Knowing that the initial stresses are zero, determine the maximum torque T0 that can be applied to the disk if the allowable stresses are **120 MPa** in the steel shaft and **70 MPa** in the aluminum tube. **Use G = 77 GPa** for steel and **G = 27 GPa** for aluminum.

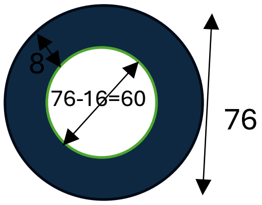


$T = T_s + T_{all}$, $Q_s = Q_{all}$

$$\frac{500T_S \times 2}{777 \times 10^3 \times \pi \times 25^4} = \frac{500T_{All} \times 32}{37 \times 10^3 \times \pi \times (76^4 - 60^4)} =$$

$$= 1.05 \times 10^{-8} T_S = 9.25 \times 10^{-9} T_{All} \rightarrow \quad T_S = 0.873 T_{All}$$

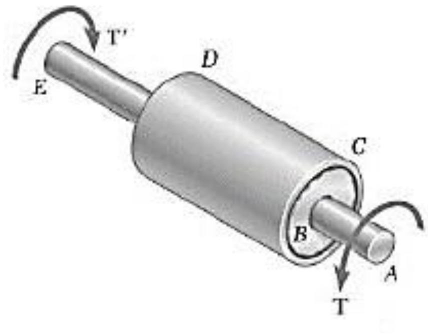
$$\tau_s = \frac{T_S r}{J} = 120 = \frac{T_S \times 25 \times 2}{\pi \times 25^4} \rightarrow = T_S = 2944\ N.m$$



$$T_{All} = \frac{2944}{0.873} = 3372.3\ N.m$$

$$\tau_{all} = \frac{3372.3 \times 10^3 \times 38 \times 2}{\pi \times (38^4 - 30^4)} = 64.1\ MPa < 70\ MPa \quad OK$$

$$T_0 = 2944 + 3372.3 = \mathbf{6316\ N.m}$$



The steel jacket *CD* has been attached to the 40-mm-diameter steel shaft *AE* by means of *rigid* flanges welded to the jacket and to the rod. The outer diameter of the jacket is 80 mm and its wall thickness is 4 mm. If 500 N · m torques are applied as shown, determine the maximum shearing stress in the jacket.

$500 \times 10^3 = T_j + T_S \quad \cdots\rightarrow 1$

$\phi_j = \phi_S$ ⟶ الأساس للحل

$$\frac{T_j \times L \times 2}{G \times \pi \times (40^4 - 36^4)} = \frac{T_S \times L \times 2}{G \times \pi \times 20^4}$$

$T_j = 5.502 T_S \quad \cdots\rightarrow 2$

$500 \times 10^3 = 5.502 T_S + T_S$

$T_S = 76.9\ N.m$

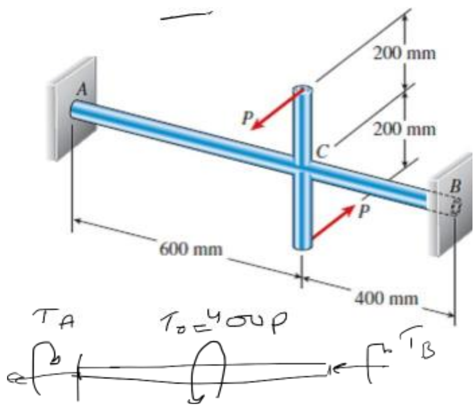
$T_j = 423.1\ N.m$

$$\tau_{max} = \frac{423.1 \times 40 \times 2}{\pi \times (40^4 - 36^4)} = \mathbf{12.24\ MPa}$$

Civilittee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civilittee-HU.com

EX: hollow steel shaft *ACB* of **outside** diameter 50 mm and **inside** diameter 40 mm is held against rotation at ends *A* and *B*. Determine the allowable value of the forces *P* if the **maximum** permissible shear stress in the shaft is 45 MPa.

دليل على إنه نص القطر رح يكون أكبر شي.



$$J = \frac{\pi(25^4 - 20^4)}{2} = \mathbf{362264.9\ mm^4}$$

$T_\circ = 400\ P \quad , \tau_{all} = 45\ Mpa$

$\boldsymbol{\phi_{AC} = \phi_{CB}} \quad , \boldsymbol{T_\circ = T_A + T_B}$

$$\frac{(600)(T_{A)}}{GJ} = \frac{(400)(T_{B)}}{GJ} \Rightarrow \boldsymbol{T_A = 0.67\, T_B}$$

$400P = 0.67\, T_B + T_B \Leftrightarrow \boldsymbol{T_B = 239.5\ P\ N.mm}$

$\boldsymbol{T_A = 0.67\, T_B} \Leftrightarrow \boldsymbol{T_A = 160.5\ P\ N.mm}$

$NOW\ ...$

AC

$$45 = \frac{\mathbf{(160.5\ P)(25)}}{\mathbf{362264.9}} \Rightarrow \boldsymbol{P = 4090.9\ N}$$

BC

$$45 = \frac{\mathbf{(239.5\ P)(25)}}{\mathbf{362264.9}} \Rightarrow \boldsymbol{P = 2722.7\ N}$$

Chapter 6

Bending

الانحناء (Bending) هو أحد المفاهيم الأساسية في مقاومة المواد، ويشير إلى التأثير الناتج عن تطبيق عزم انحناء (Bending Moment) على جسم ما (مثل الكمرات أو العوارض)، مما يؤدي إلى تغيير في شكل الجسم (تشوه) نتيجة توزيع الإجهادات (Stresses)داخله.

- عندما تؤثر قوة خارجية على جسم ما (مثل كمرة أو عارضة)، فإنها تسبب عزم انحناء يؤدي إلى انحناء الجسم حول محور معين هذا الانحناء ينتج عنه:

1- إجهادات شد(Tensile Stresses) في أحد جانبي الجسم.

2 -إجهادات ضغط(Compressive Stresses) في الجانب

CivilHee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.CivilHee.com

6.3 bending deformation of a straight bar (تشوه الانحناء في القضيب المستقيم)

عند تعرض **قضيب مستقيم** لعزم انحناء (**Bending Moment**)، فإنه يتشوه بطريقة تؤدي إلى **انحنائه**. أثناء هذا الانحناء، تتغير ألياف المادة داخله بحيث:

1. الألياف العلوية تتعرض للضغط (**Compression**).
2. الألياف السفلية تتعرض للشد (**Tension**).
3. هناك سطح محايد (**Neutral Surface**) بينهما، حيث لا يوجد شد ولا ضغط.

الخصائص الأساسية لتشوه الانحناء:

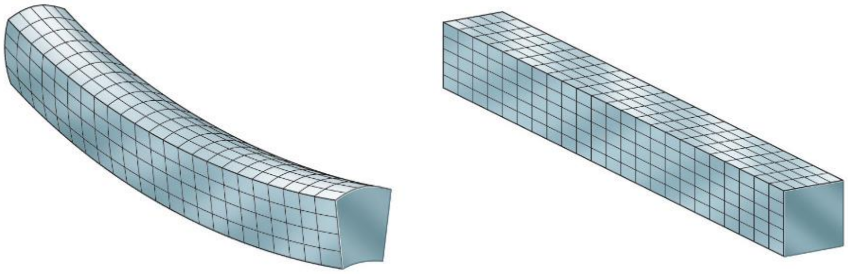
- يبقى **المحور الطولي للقضيب مستقيماً** قبل تطبيق العزم.
- بعد الانحناء، يأخذ القضيب **شكل قوس**، حيث ينحني حول محور معين.
- يحدث **إجهاد شد** في الألياف البعيدة عن المحور المحايد من جهة، **وإجهاد ضغط في الجهة الأخرى**.

معادلة الانحناء (Bending Formula):

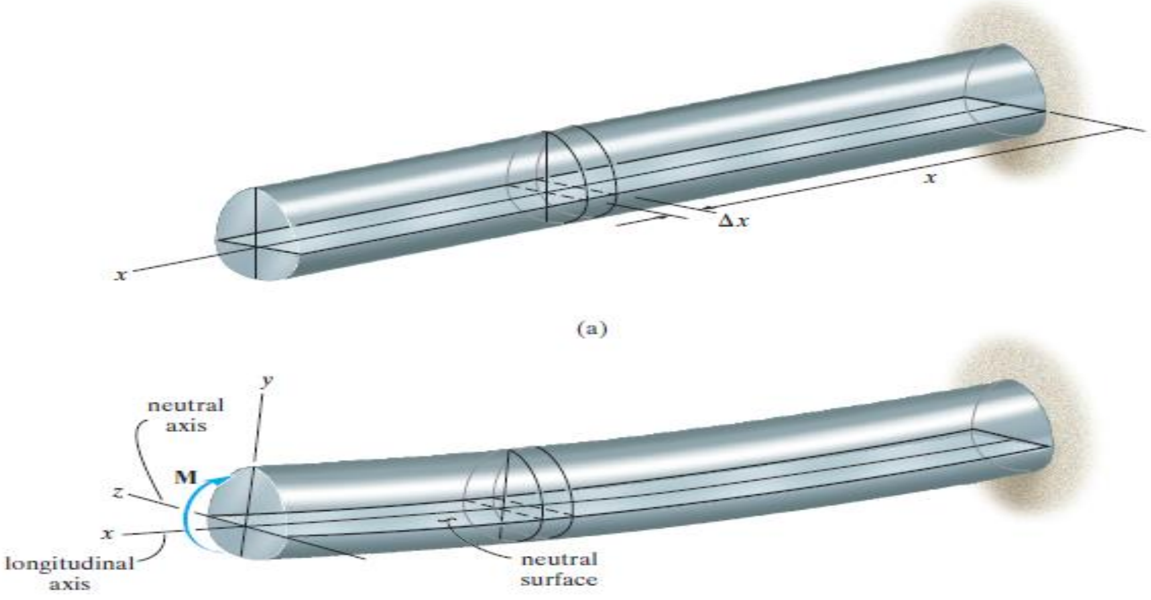
$$\frac{My}{I} = \sigma$$

حيث:

- σ = الإجهاد عند نقطة معينة داخل المقطع العرضي.
- M = عزم الانحناء المؤثر على القضيب.
- y = المسافة من المحور المحايد إلى النقطة المراد حساب الإجهاد عندها.
- I = عزم العطالة الثاني للمقطع العرضي (Moment of Inertia).



After deformation *Before deformation*



Longitudinal Strains in beams

- xy plane is a **plane of symmetry**.

المستوى xy هو مستوى التماثل.

- **Loading** is applied in xy plane.

يتم تطبيق التحميل في المستوى xy.

- **Beam deflects** in xy plane.

تنحرف العارضة في المستوى xy.

- Thickness of the beam, h, **remains unchanged.**

سمك العارضة يبقى كما هو.

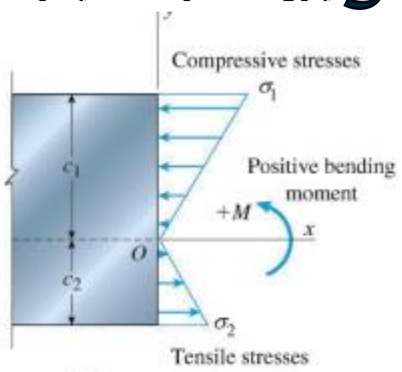
- Axis of the beam coincides with the centroidal line of the cross section.

يتطابق محور العارضة مع الخط المركزي للمقطع العرضي.

$$\sigma_{max} = -\frac{Mc}{I}$$

Maximum Stresses at a Cross

يكون عند الحواف السفلية او العلوية



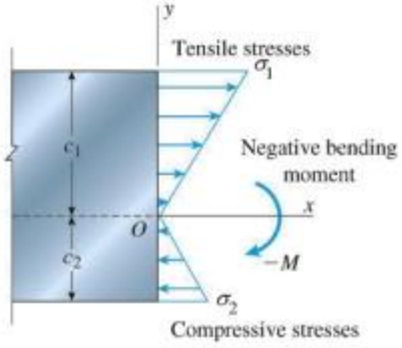
(a)

C= هي المسافة العمودية من المحور المحايد الى ابعد نقطة في العامود سواء في الجزء العلوي او السفلي.

Civiltee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civiltee-HU.com

اشارة σ (stress)

(-) Compressive stresses	(+) Tensile stresses



(b)

الوحدات المستخدمة في القانون :

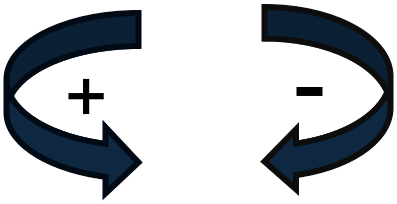
$\sigma = MPa$

$M = N.mm$

$y, C = mm$

$I = mm^4$

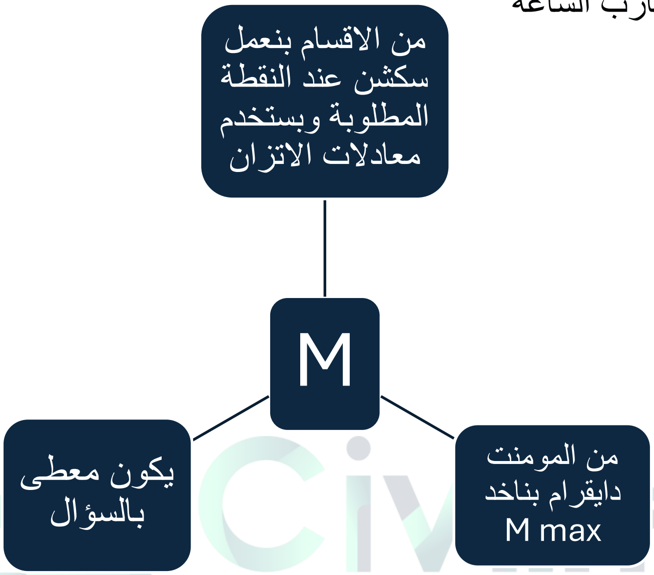
اشارة(M)



flexural stress:

$$\sigma = -\frac{M\gamma}{I}$$

- $M =$ العزم الداخلي

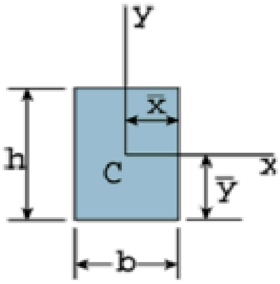


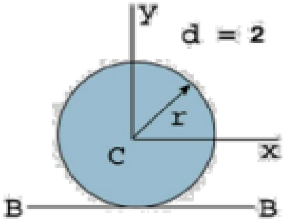
Civil-Tee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.civiltee-HU.com

$Y =$ المسافة العمودية من المحور المحايد إلى النقطة المطلوبة

$I =$ عزم القصور الذاتي للمقطع العرضي حول المحور المحايد

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA$$





$$I_x = \frac{bh^3}{12}, \quad I_y = \frac{hb^3}{12}$$

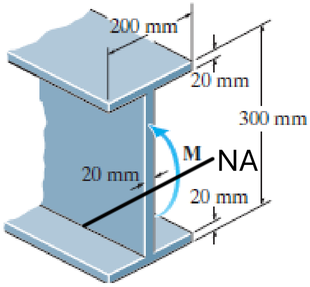
$$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

كيفية ايجاد I

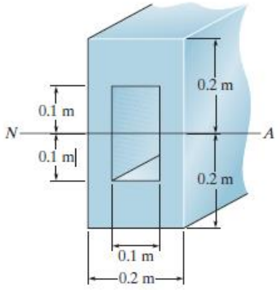
1- للاشكال المتماثلة حول المحور المحايد (Neutral Axis) يتم ايجاده **مباشرة** ويكون السنترويد $\tilde{y}$ بالمنتصف وان وجد مساحات مفرغة نطرحها من الشكل الاصلي مثل:

$$I = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{12} = \frac{200 \times 300^3}{12} - \frac{180 \times 260^3}{12} = 186.4 \times 10^6 \; mm^4$$

(الشكل كامل) **(مساحة مفرغة)**



$$I = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{12} = \frac{0.2 \times 0 \cdot 4^3}{12} - \frac{0.1 \times 0.2^3}{12} = 0.001 m^4$$



2- اشكال غير متماثلة حول المحور المحايد فيجب علينا ايجاد اين يقع المحور المحايد (Neutral Axis) من خلال قانون السنترويد $\tilde{y}$ ثم ايجاد I باستخدام **(parallel axis theorem)**:

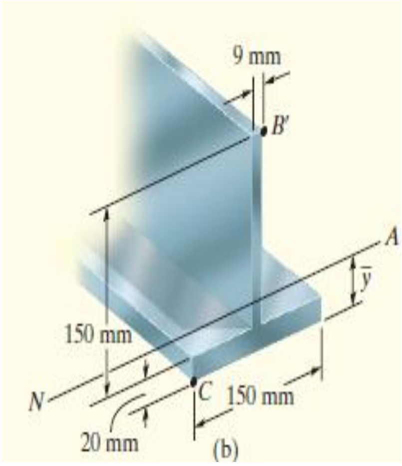
1- نجد موقع السنترويد(مركز الجسم) نفسو موقع المحور المحايد من خلال القانون التالي :

$$\tilde{y} = \frac{\sum \bar{y} A}{\sum A}$$

$\bar{y}$ = هوالمسافة من X-axis الى مركز القطعة اي منتصفها

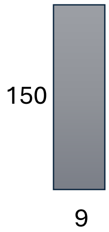
A =مساحة القطعة , Σ = مجموع

2- نقسم الشكل الى جزئين (مستطيلين) ونحسب مساحة كل مستطيل لوحده



A_1 =150*20=3000

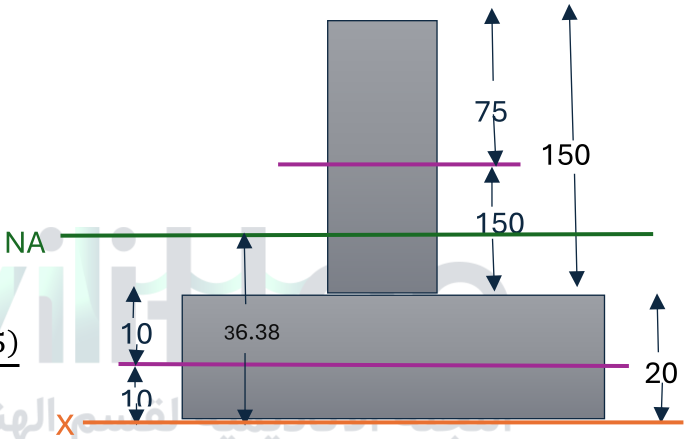
A_2 =9*150=1350



3- نجد $\bar{y}$ و هي المسافة من محور x الى منتصف كل قطعة:

y_1=10

y_2=20+75=95



$$\bar{y}=\frac{\sum yA}{\Sigma A}=\frac{y_1A_1+y_2A_2}{A_1+A_2}=\frac{(3000\times10)+(1350\times95)}{3000+1350}$$

$= \mathbf{36.38mm}$

www.Civilittee-HU.com

نجد I باستخدام **نظرية المحور الموازي (parallel axis theorem)** نستخدمها لما بدنا نطلع ال I لجسم حول محور موازي يبعد عنه مسافة d,حيث d هي المسافة من سنترويد القطعة الى NA

$$\boldsymbol{I=\frac{bh^3}{12}+Ad^2}$$

- d_1=36.38-10=**26.38** , - d_2=95-36.38=**58.62**

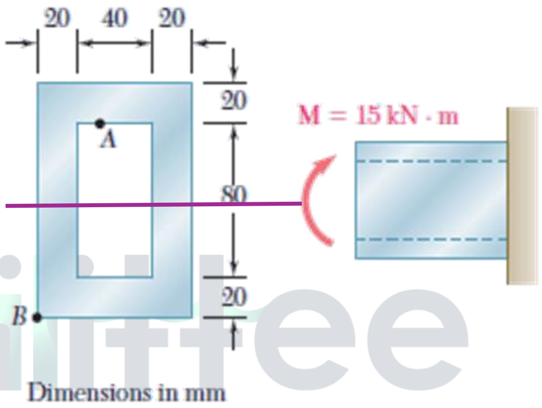
- $I_1=\frac{150\times20^3}{12}=\mathbf{1\times10^6}$, - $I_2=\frac{7\times150^3}{12}=\mathbf{2.5\times10^6mm^4}$

$$I_{NA}=\left(I_{C_1}+A_1d_1^2\right)+\left(I_{C_2}+A_2d_2^2\right)$$
$$=(1\times10^6+3000\times26.38^2)+(2\cdot5\times10^6+1350\times58.62^2)$$
$$=\mathbf{10\times10^6mm^4}$$

➢ EX : determine the stress at (a) point A, (b) point B

➢ في هذا المثال اعطاني المومنت جاهز واتجاهه مع عقارب الساعة يعني اشارته سالب, نجد I للشكل بالطريقة المباشرة المذكورة بالاعلى لانه شكل متماثل حول المحور المحايد (NA) يلي موقعو نفس موقع مركز الكتلة بنصف الشكل لانه متماثل, I ثابتة في السؤال اي لا تتغير اذا طلب الستريس عند نقطة A او B , ثم نجد y وهي المسافة من المحور المحايد الى النقطة المطلوبة تكون y موجبة + اذا كانت النقطة المطلوبة فوق NA وتكون سالبة – اذا كانت اسفل النقطة.

$$\sigma = -\frac{M\gamma}{I}$$



$$I = \frac{80\times120^3}{12} - \frac{40\times80^3}{12} = 9.813\times10^6 mm^4$$

اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civilittee-HU.com

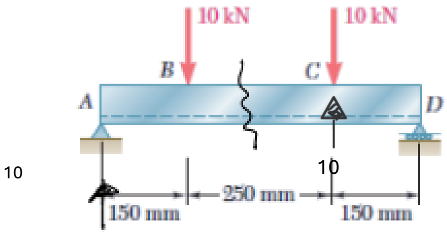
$$\sigma_a = -\frac{15\times10^6\times40}{9.813\times10^6} = -61.14MP\ (C)$$

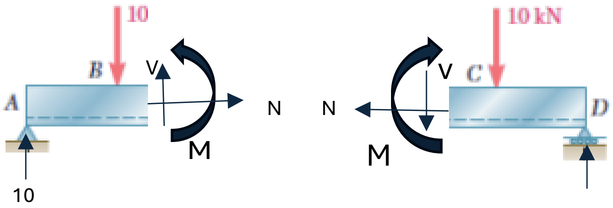
$$\sigma_b = -\frac{15\times10^6\times-60}{9.813\times10^6} = 91.72MP\ \ (T)$$

EX : Determine **the maximum tensile** and **compressive stresses** in portion BC of the beam.

- في هاد المثال مو معطينا المومنت فنجده من **خلال عمل سكشن بين النقطتين BC**

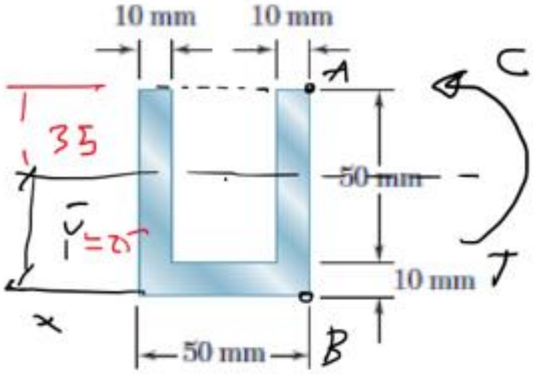
نختار اي جزء ونطبق معادلات





$$M_C = 0 = 0 + 150\times10 = 1500kN\cdot mm$$

(موقع مركز الجسم) نفسو موقع NA ثم نجد I بالطريقة غير المباشرة **لان الشكل غير متماثل حول NA**



$$\tilde{y} = \frac{\sum yA}{\Sigma A} = \frac{\mathbf{50 \times 60 \times 30 - 30 \times 50 \times 35}}{\mathbf{1500}} = \mathbf{25mm}$$

$$I = \left[\frac{50 \times 60^3}{12} - \frac{30 \times 50^3}{12}\right] + [50 \times 60 \times (30 - 25)^2 - 1500(35 - 25)^2] \quad = \mathbf{512.5 \times 10^3 mm^4}$$

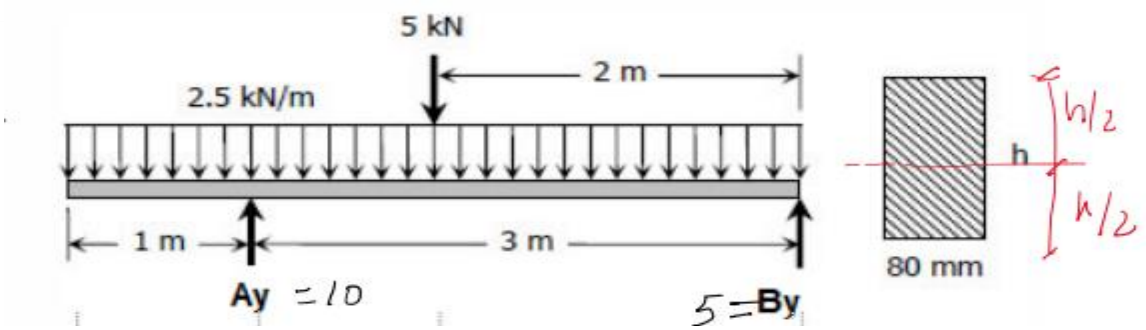
$$\boldsymbol{\sigma = -\frac{M\gamma}{I}}$$

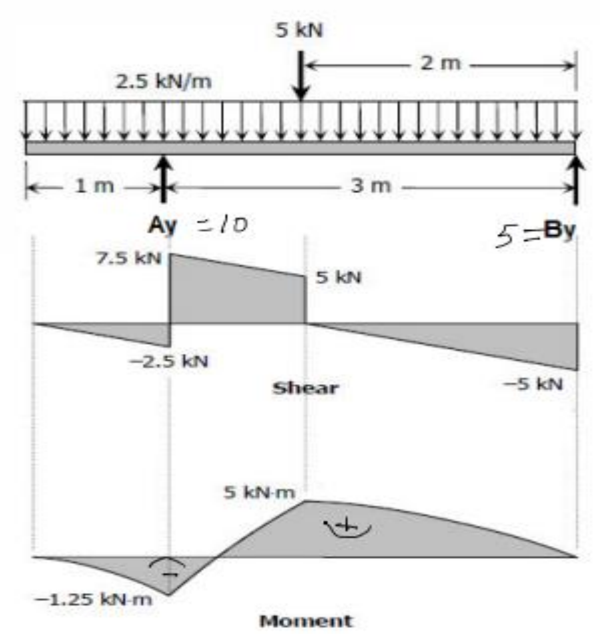
$$\sigma a = -\frac{-1500 \times 10^3 \times 35}{512.5 \times 10^3} = \mathbf{-102.4\ MPa\ (c)}$$

$$\sigma b = -\frac{1500 \times 10^3 \times -25}{512.5 \times 10^3} = \mathbf{73.17 MPa\ (T)}$$

EX : Determine the minimum height h of the beam shown , if **the flexural stress is not to exceed 20 MPa.**

في هاد السؤال ما اعطانا المومنت جاهز ولا اعطانا بدو اياه عند نقطة معينة على البيم مثل المثال السابق هون بنرسم مومنت دايقرام وبناخد اعلى قيمة عليه لانه طالب اقل h.





Uniformly Distributed Load
قيمة

$\sum M_b=0= 5*2 + 2.5*4*2 - A_y*3 =0$

$A_y=10$

$\sum X=0=B_y -5 -10 +10$

$B_y=5$

Civilittee

هيك طلعنا الرياكشن ثم نبدا برسم الشير نحسب قيمة الدستربيوتد لود بين كل قوة وقوة.

M_{max} = +5 kN.m

$$\sigma = \frac{M\gamma}{I} \qquad 20 = \frac{5\times10^6\times\frac{h}{2}}{80h^3} \longrightarrow h = 137mm$$

EX : The beam is made from three boards nailed together as shown. If the moment acting on the cross section is **M= 600 N.m**, determine **the maximum bending stress** in the beam. Sketch a three dimensional view of the stress distribution acting over the cross section.

في الاشكال مثل **U beam** عند حساب السنترويد لها ناخد محور مرجعي **مشترك** لجميع الاجزاء ,في هذا الشكل اخدنا المحور المرجعي بالأعلى.

$$\bar{y} = \frac{(0.0125)(0.24)(0.025) + 2(0.1)(0.15)(0.2)}{0.24(0.025) + 2(0.15)(0.02)} = 0.05625 \text{ m}$$

$$I = \frac{1}{12}(0.24)(0.025^3) + (0.24)(0.025)(0.04375^2)$$

$$+ 2\left(\frac{1}{12}\right)(0.02)(0.15^3) + 2(0.15)(0.02)(0.04375^2)$$

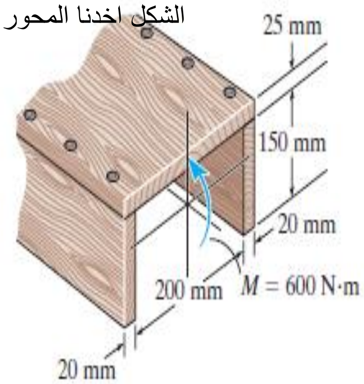
$$= 34.53125(10^{-6}) \text{ m}^4$$

$$\sigma_{max} = \sigma_B = \frac{Mc}{I}$$

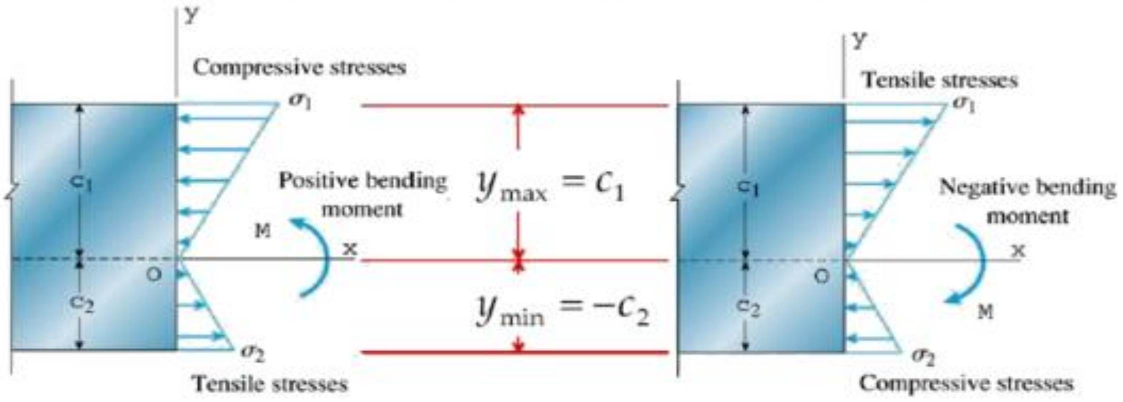
$$= \frac{600(0.175 - 0.05625)}{34.53125(10^{-6})}$$

$$= 2.06 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = \frac{My}{I} = \frac{600(0.05625)}{34.53125(10^{-6})} = 0.977 \text{ MPa}$$



Maximum Stresses at a Cross Section



$$\sigma_x = -\frac{My}{I}$$

$$\sigma_1 = -\frac{Mc_1}{I} = -\frac{M}{S_1}, \quad S_1 = \frac{I}{c_1}$$

$$\sigma_2 = -\frac{M(-c_2)}{I} = \frac{M}{S_2}, \quad S_2 = \frac{I}{c_2}$$

S_1 and S_2 are known as the "Section Muduli" of the cross-sectional area. (See Appendix E)

أقصى الإجهادات عند المقطع العرضي (Maximum Stresses at a Cross Section)

www.Civilittee-HU.com

الصورة توضح كيف يتوزع الإجهاد داخل مقطع عرضي عند تعرضه لعزم انحناء.

يتم توليد نوعين من الإجهادات:

1- إجهادات ضغط (Compressive Stresses) في الجزء العلوي عندما يكون العزم موجبًا.

2- إجهادات شد (Tensile Stresses) في الجزء السفلي.

معادلة الإجهاد الناتجة عن الإنحناء:

$$\sigma_x = \frac{-My}{I}$$

حيث:

- σ_x = الإجهاد عند مسافة y من المحور المحايد.
- M = عزم الانحناء المؤثر على المقطع العرضي.
- y = المسافة من المحور المحايد إلى النقطة المراد حساب الإجهاد عندها.
- I = عزم العطالة الثاني (Moment of Inertia) للمقطع العرضي.

حساب الإجهاد الأقصى عند النقاط الحرجة:

- عند $y = C_1$ (أبعد نقطة في الأعلى)، يكون الإجهاد الأقصى:

$$\sigma_1 = \frac{-MC_1}{I} = \frac{M}{S_1}, \quad S_1 = \frac{I}{C_1}$$

- عند $y = -C_2$ (أبعد نقطة في الأسفل)، يكون الإجهاد:

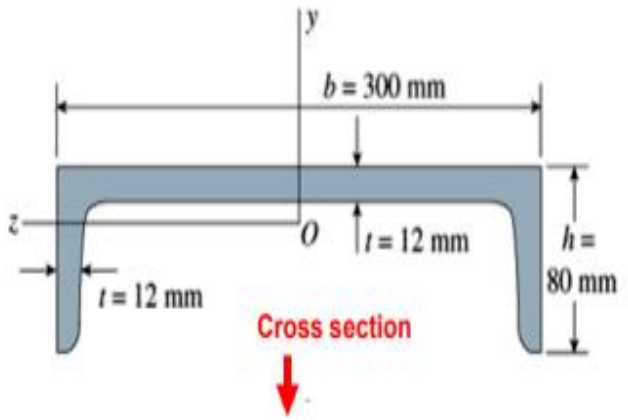
$$\sigma_2 = \frac{-M(-C_2)}{I} = \frac{M}{S_2}, \quad S_2 = \frac{I}{C_2}$$

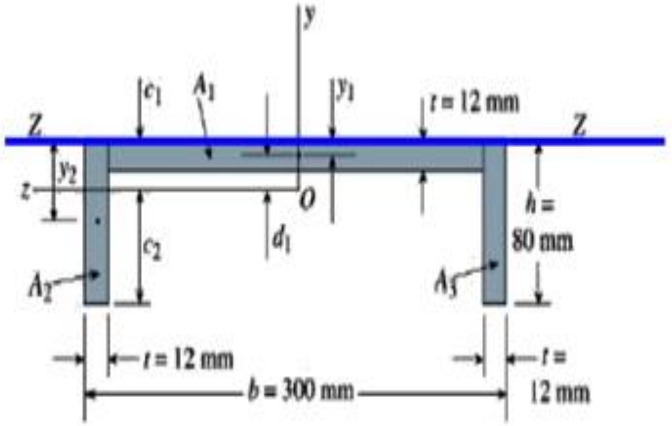
المعاملات المهمة:

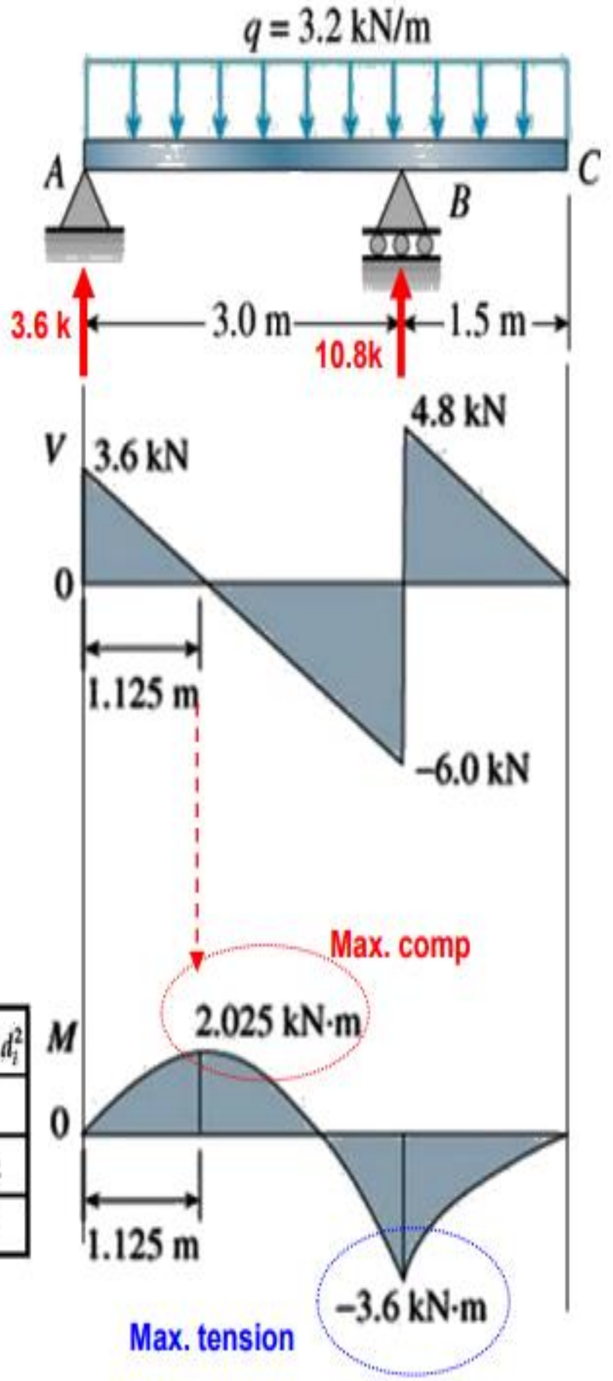
- S_1 و S_2 يُعرفان باسم "**عزوم المقطع**" (**Section Moduli**)، وهما مقياسان لمدى مقاومة المقطع العرضي للانحناء.

هذا السؤال مهم مهم مهم

Example 5-4: Determine the maximum tensile and compressive stress in the beam

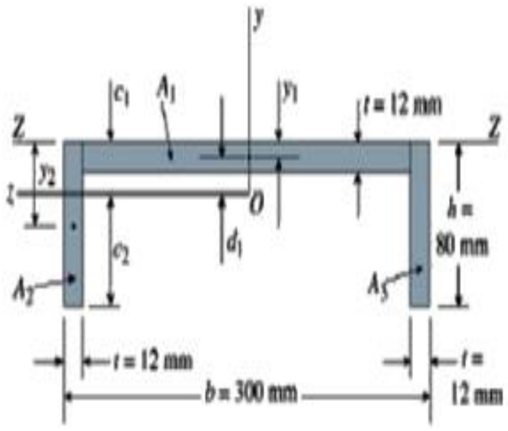






	A_i	$\bar{y}_i$	Q_i	$I_{zi}^{(i)} = bh^3/12$	d_i	$A_i d_i^2$	$I_z^{(i)} = I_{zi}^{(i)} + A_i d_i^2$
①	3,312	6	19,872	39,744	12.48	515,845	555,589
②, ③	960 × 2	40	38,400 × 2	512,000 × 2	- 21.52	444,586 × 2	956,586 × 2
Σ	5,232		97,672				2,468,761

$$\bar{y} = c_1 = \frac{\sum Q_i}{\sum A_i} = 18.48\ \text{mm}, \quad c_2 = h - c_1 = 61.52\ \text{mm}$$

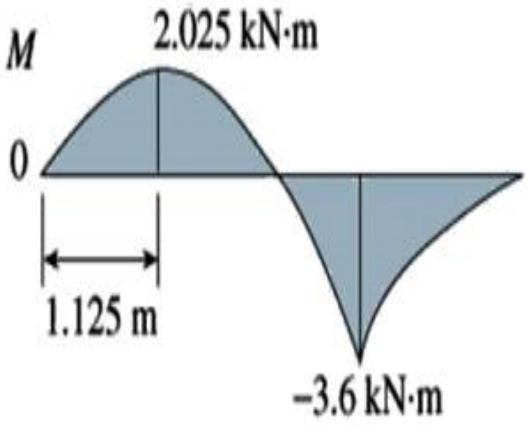


(b)

$$I_z = 2.469 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$c_1 = 18.48 \text{ mm} \quad \Rightarrow \quad S_1 = \frac{I_z}{c_1} = 133{,}600 \text{ mm}^3$$

$$c_2 = 61.52 \text{ mm} \quad \Rightarrow \quad S_2 = \frac{I_z}{c_2} = 40{,}100 \text{ mm}^3$$



at $x = 1.125 \text{ m}, \quad M = 2.025 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$$\sigma_1 = -\frac{M}{S_1} = -\frac{2.025 \text{ kN} \cdot \text{m}}{133{,}600 \text{ mm}^3} = -15.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{M}{S_2} = \frac{2.025 \text{ kN} \cdot \text{m}}{40{,}100 \text{ mm}^3} = 50.5 \text{ MPa}$$

at $x = 3.0 \text{ m}, \quad M = -3.6 \text{ kN} \cdot \text{m}$

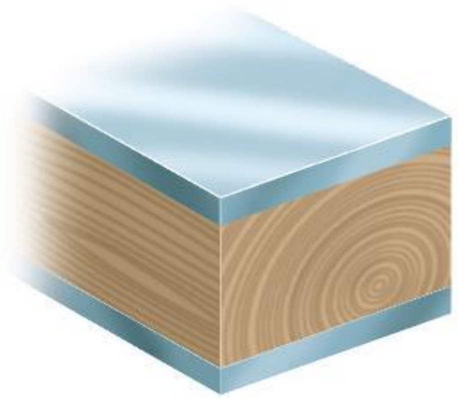
$$\sigma_1 = -\frac{M}{S_1} = -\frac{-3.6 \text{ kN} \cdot \text{m}}{133{,}600 \text{ mm}^3} = 26.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{M}{S_2} = \frac{-3.6 \text{ kN} \cdot \text{m}}{40{,}100 \text{ mm}^3} = -89.8 \text{ MPa}$$

$$\left(\sigma_{tensile}\right)_{max} = 50.5 \text{ MPa}$$

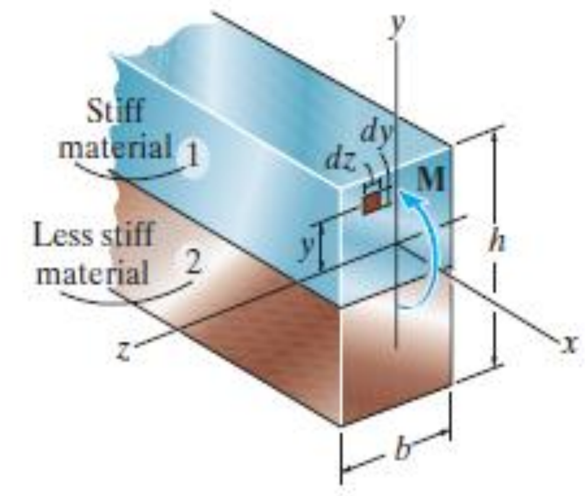
$$\left(\sigma_{compressive}\right)_{max} = -89.8 \text{ MPa}$$

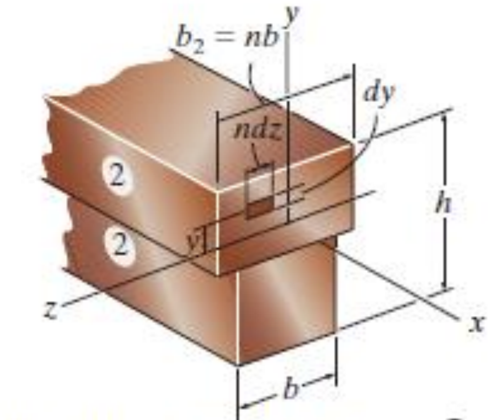
6.6 Composite Beam(العوارض المركبة)



A composite beam is composed of two or more elemental structural forms, or different.

هي تلك التي تتكون من **عنصرين أو أكثر** من الأشكال الإنشائية المختلفة أو المواد المختلفة. يتم استخدامها لتحسين **الأداء الهيكلي** والاستفادة من **خصائص المواد المتنوعة** لتحقيق مقاومة أكبر وأداء اقتصادي أفضل.





Beam transformed to material ②

Transformed Section Method

1. Transform the cross section of a composite beam into an equivalent cross section (of an imaginary beam composed of only one material) is called the transformed section.

تحويل المقطع العرضي للحزمة المركبة إلى مقطع عرضي مكافئ لحزمة خيالية تتكون من مادة واحدة فقط تسمى القسم المحول .

2. Analyze the transformed section as customary for a beam of one material.

قم بتحليل القسم المحول كما هو معتاد لشعاع من مادة واحدة.

3. Convert the stresses back to the original beam.

تحويل الضغوط مرة أخرى إلى الشعاع الأصلي.

4. Modular ratio

n = E2/E1

5. The dimensions of area 1 remain unchanged, and the width of area 2 is multiplied by **n** all dimensions perpendicular to the neutral axis remain the same.

تبقى أبعاد المنطقة الاولى دون تغيير ، ويتم ضرب عرض المنطقة التانية في n
، تبقى جميع الأبعاد العمودية و المحور المحايد كما هم

CivilItee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.CivilItee-HU.com

Flexure Formula :

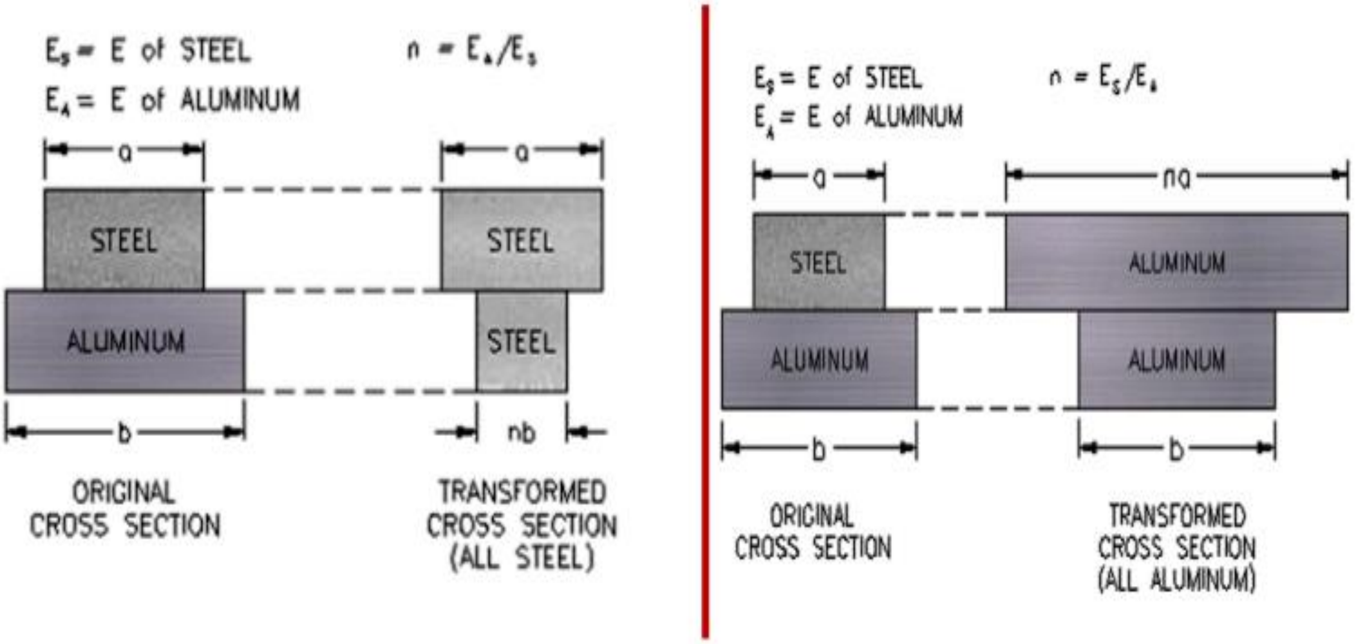
$$\sigma_{x_1} = -\frac{My}{I} \qquad \sigma_{x_2} = -n\frac{My}{I}$$

- تصنع الحزم المركبة من مواد مختلفة من أجل تحمل حمولة بكفاءة. تطبيق صيغة الانثناء يتطلب أن تكون المادة متجانسة ، وبالتالي فإن الصليب يجب تحويل قسم الحزمة إلى مادة واحدة إذا تستخدم هذه الصيغة لحساب إجهاد الانحناء.

- عامل التحويل n هو نسبة وحدات المواد المختلفة التي تشكل الحزمة تستخدم كمضاعف ، يحول عرض المقطع العرضي للحزمة المركبة.

- في شعاع مصنوع من مادة واحدة بحيث يكون لهذا الشعاع نفس قوة الشعاع المركب. وبالتالي ، ستكون المواد الصلبة تم استبدالها بمزيد من المواد الأكثر نعومة والعكس صحيح.

- بمجرد تحديد الضغط (STRESS)في المادة المحولة ، يجب ضربها في عامل التحويل للحصول على الإجهاد في أي مادة محولة من الحزمة الفعلية.



EX : A copper strip (***Ec* =105 GPa**) and an aluminum strip (***Ea* =75 GPa**) are bonded together to form the composite beam shown. Knowing that the beam is bent about a horizontal axis by a couple of moment ***M* =35 N.m**, determine the maximum stress in (a) **the aluminum strip**, (b) **the copper strip**.

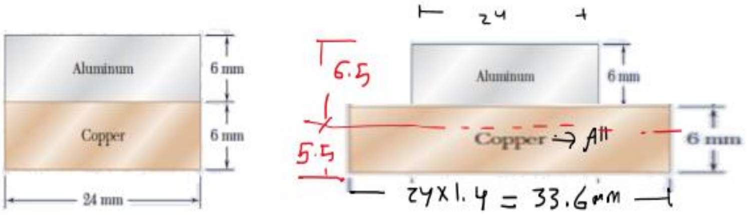
$$Y = \frac{(24 * 6 * 9 \ + \ 33.6 * 6 * 3)}{345.6} = \mathbf{5.5\ mm}$$

$$I = \left[\frac{24 \times 6^3}{12} + \frac{33.6 \times 6^3}{12}\right] + [144 \times (5.5 - 3)^2 + 201.6 \times (6.5 - 3)^2] = \mathbf{4061\ mm^4}$$

$$\boldsymbol{n = \frac{E_C}{E_a} = \frac{105}{75} = 1.4}$$

$$\boldsymbol{\sigma_{all}} = -\frac{My}{I} = -\frac{35 \times 10^3 \times 6.5}{4061} = \boldsymbol{-56\ MPa}$$

$$\boldsymbol{\sigma_c} = -n\frac{My}{I} = -1.4\frac{35 \times 10^3 \times -5.5}{4061} = \boldsymbol{66.4\ MPa}$$



Transformed section

6.7 Reinforced concrete Beams(عوارض الخرسانة المسلحة)

- Transform to a section made entirely of **concrete**.

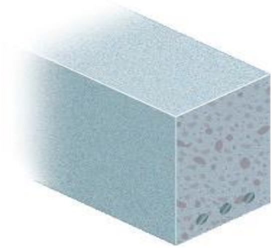
بنحول الى قسم مصنوع بالكامل من الخرسانة.

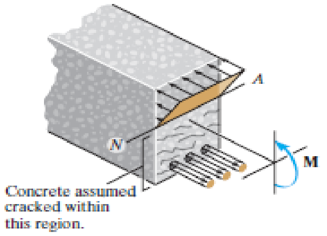
- Evaluate geometric properties of **transformed section**.

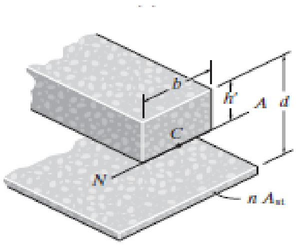
تقييم الخصائص الهندسية للقسم المحول.

- Calculate **the maximum stresses** in the concrete and steel.

حساب الحد الاقصى للاجهاد في الخرسانة والحديد.







خطوات الحل:

1- اول خطوة بنطلع $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{E_{st}}}{\boldsymbol{E_{conc}}}$ transformation factor

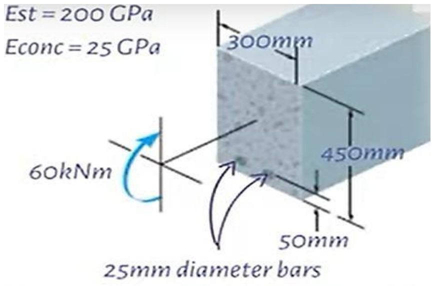
وبنطلع مساحة حديد التسلح تم بنضربهم ببعض **A*=n A_{st}**

(عددهم * $A_{st} = \pi * r^2$).

2- بنطلع موقع المحور المحايد كالاتي بنستعمل هاي المعادلة عشان نطلع h

للشكل بعد التحويل وبعدين بنطلع I

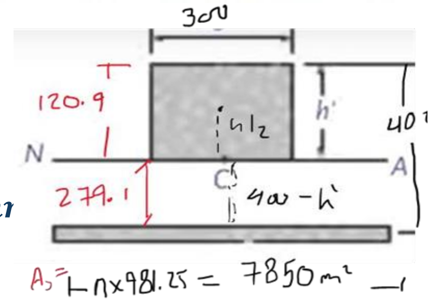
EX : The reinforced concrete beam has the cross-sectional area If it is subjected to bending moment of **M = 60Kn*m**, determine **the normal stress** in each of the steel reinforcing rods and **the maximum normal stress** in the concrete .Take **Est = 200 GPa** and **Econc = 25 GPa**.



$$n = \frac{ES}{EC} = \frac{200}{25} = 8$$

$$A = 2 \times \frac{\pi 25^2}{4} = 981.25$$

$$300h \times \frac{h}{2} - 7858 \times (400 - h) = o \quad \rightarrow h = 120.9mm$$

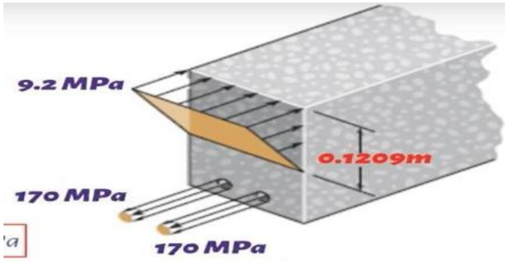


$$I = I_{\text{مستطيل العلوي}} + Ad^2{}_{\text{مستطيل}} + Ad^2{}_{\text{(خرسانةمكافئة)حديد}}$$

$$I = \frac{300 \times 120.9^3}{12} + (300 \times 120.9 \times \frac{120.9^2}{2}) + 7850 \times 279.1^2 = 788.52 \times 10^6 m$$

$$\sigma\, c = \frac{M\gamma}{I} = \frac{60 \times 10^6 \times 120.9}{788.52 \times 10^6} = 9.2MPa$$

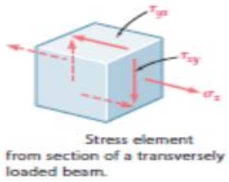
$$\sigma\, st = \frac{nM\gamma}{I} = \frac{8 \times 60 \times 10^6 \times 279.1}{788.52 \times 10^6} = 169.9MPa$$



Chapter 7

Transverse Shear

Bending Moments and Shear Forces in Beams



7.2 The Shear Formula (صيغة القص)

$$\tau = \frac{VQ}{bI}$$

τ = the shear stress in the member at the point located a distance y from the neutral axis. This stress is assumed to be constant and therefore *averaged* across the width b of the member.

إجهاد القص في العضو عند النقطة الواقعة على مسافة y من المحور المحايد من المفترض أن يكون هذا الضغط ثابتًا ولذلك متوسط عبر عرض b للعضو.

V = the shear force, determined from the method of sections and the equations of equilibrium.

قوة القص، ويتم تحديدها من طريقة القص ومعادلات التوازن.

I = the moment of inertia of the *entire* cross-sectional area calculated about the neutral axis.

عزم القصور الذاتي لكامل مساحة المقطع العرضي محسوب حول المحور المحايد.

b= the width of the member's cross section, measured at the point where b is to be determined.

عرض المقطع العرضي للعضو، مقاسًا عند النقطة التي سيتم تحديد b فيها.

Q = yA, where A is the area of the top (or bottom) portion of the member's cross section, above (or below) the section plane where b is measured, and y is the distance from the neutral axis to the centroid of A .

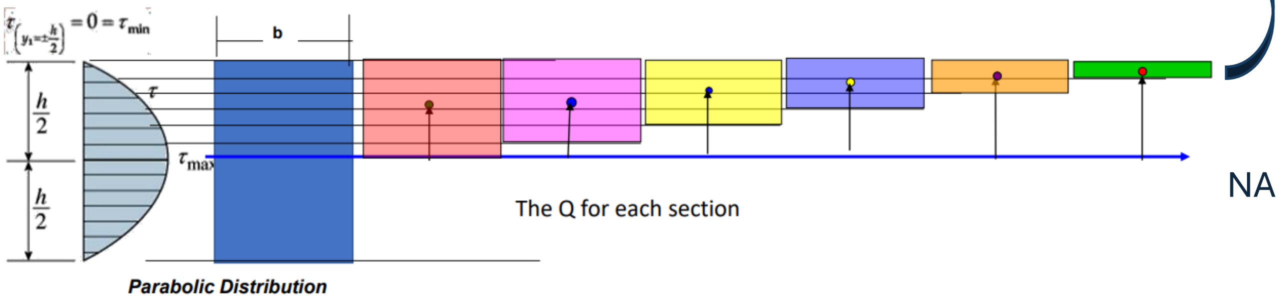
yA، حيث A هي مساحة الجزء العلوي (أو السفلي) من المقطع العرضي للعضو، أعلى (أو أسفل) مستوى القسم حيث يتم قياس b، وy هي المسافة من المحور المحايد إلى النقطه الوسطى من A.

calculated about the neutral axis

❖ $\tau yx = 0$ on the upper and lower faces of the beam

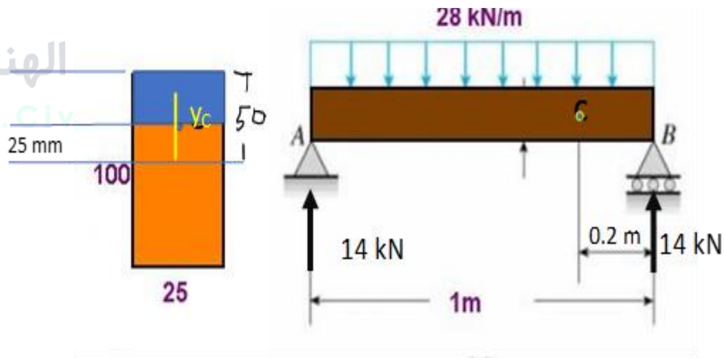
اجهاد القص على الوجه العلوي والسفلي للبيم يساوي صفر

هون Q عبارة عن المسافة من المحور المحايد الى مركز ثقل القطعة المحددة (منتصفها)



EX:Determine **the bending stress** and **shear stress** at point C and draw the stress element.

M_C = 2.24 kN.m



$$I = \frac{b\,h^3}{12} = \frac{1}{12} \times 25 \times 100^3 = 2{,}083 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

normal stress at C is

$$\sigma_C = -\frac{My}{I} = -\frac{2.24 \times 10^6 \text{ N-mm} \times 25 \text{ mm}}{2{,}083 \times 10^3 \text{ mm}^4} = -26.9 \text{ MPa}$$

Y المسافة من المحور المحايد الى نصف مسافة القطعة C

$Y = 25 + \frac{25}{2} = 37.5$

shear stress at C, calculate Q_C first

$A_C = 25 \times 25 = 625 \text{ mm}^2 \quad y_C = 37.5 \text{ mm}$

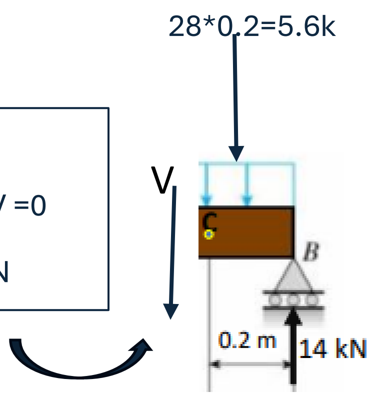
$Q_C = A_C y_C = 23{,}400 \text{ mm}^3$

$$\tau_C = \frac{V_C Q_C}{I b} = \frac{8{,}400 \times 23{,}400}{2{,}083 \times 10^3 \times 25} = 3.8 \text{ MPa}$$

Y=0

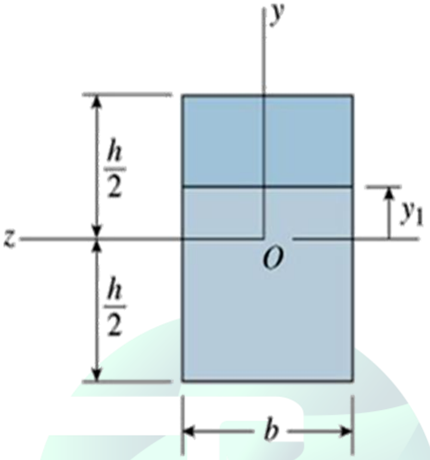
14 – 5.6 -V =0

V= -8.4 KN



← عنا قوانين مختصرة بنستعملها لما يطلب τ_{max} للاشكال المستطيلة والدائرية :

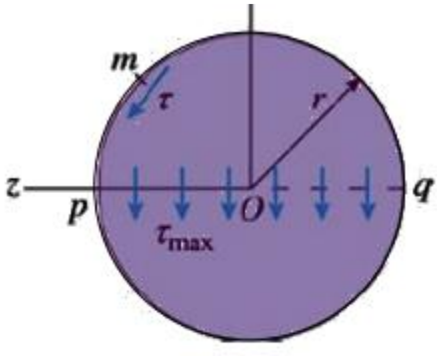
Shear Stresses in Rectangular Beams



$$\tau_{(y_1=0)} = \tau_{max} = \frac{Vh^2}{8I} = \frac{Vh^2}{8}\left(\frac{12}{bh^3}\right) = \frac{3}{2}\frac{V}{bh} = 1.5\tau_{ave}$$

Civiliftee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civiliftee-HU.com

Shear Stresses in beams of Circular cross section



$$\tau_{max} = \frac{VQ}{bI} = \frac{4V}{3\pi r^2} = \frac{4V}{3A} = 1.33\tau_{ave}$$

EX: The wood beam has an allowable shear stress of ***τ*allow = 7 MPa**. Determine **the maximum shear force V** that can be applied to the cross section.

$$\frac{1}{12} \times 200 \times 200^3 - \frac{1}{12} \times 100 \times 100^3 = \mathbf{125 mm^4}$$

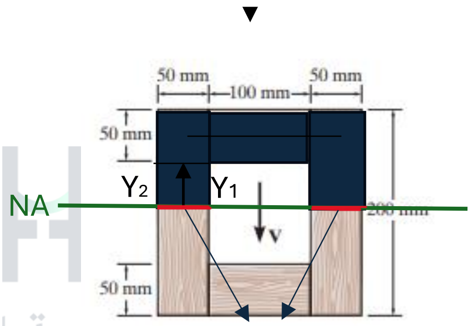
$$\boldsymbol{\tau = \frac{VQ}{bI}}$$

$$Q = Y_1 A + 2(Y_2 A)$$

Q =75*100*50 + 2*100*50*50 =875000

$$7 = \frac{V * 875000}{125 * 100}$$

$$\mathbf{V = 0.1N}$$

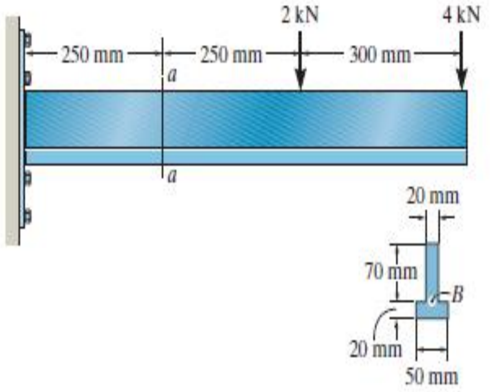


b =50+50=100

هي المساحة الملامسة

لل NA

- EX : Determine **the shear stress at point B** on the web of the cantilever strut at section a-a



$$\bar{y} = \frac{(0.01)(0.05)(0.02) + (0.055)(0.07)(0.02)}{(0.05)(0.02) + (0.07)(0.02)} = 0.03625 \text{ m}$$

$$I = \frac{1}{12}(0.05)(0.02^3) + (0.05)(0.02)(0.03625 - 0.01)^2$$

$$+ \frac{1}{12}(0.02)(0.07^3) + (0.02)(0.07)(0.055 - 0.03625)^2 = 1.78625(10^{-6}) \text{ m}^4$$

$$\bar{y}'_B = 0.03625 - 0.01 = 0.02625 \text{ m}$$

$$Q_B = (0.02)(0.05)(0.02625) = 26.25(10^{-6}) \text{ m}^3$$

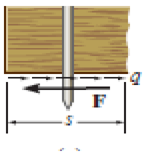
$$\tau_B = \frac{VQ_B}{It} = \frac{6(10^3)(26.25)(10^{-6})}{1.78622(10^{-6})(0.02)}$$

$$= 4.41 \text{ MPa}$$

7.3 Shear Flow in Built-Up Members (تدفق القص في الأعضاء المبنية)

يتم "بناء" الأعضاء من عدة أجزاء مركبة من أجل تحقيق مقاومة أكبر للأحمال إذا تسببت الأحمال في ثني الأعضاء ستكون هناك حاجة إلى أدوات تثبيت مثل المسامير أو البراغي أو مواد اللحام أو الغراء لمنع الأجزاء المكونة من الانزلاق بالنسبة لبعضها البعض، ومن أجل تصميم هذه المثبتات أو تحديد المسافات بينها، فمن الضروري لمعرفة قوة القص التي يجب أن يقاوموها. هذا التحميل عند قياسه كقوة لكل وحدة طول من الشعاع، يشار إليها بتدفق القص، q.

$$q = \frac{VQ}{I}$$



q = the shear flow, measured as a force per unit length along the beam

تدفق القص، مقاسًا كقوة لكل وحدة طول على طول الحزمة.

V = the shear force, determined from the method of sections and the equations of equilibrium.

قوة القص، ويتم تحديدها من طريقة المقاطع ومعادلات التوازن.

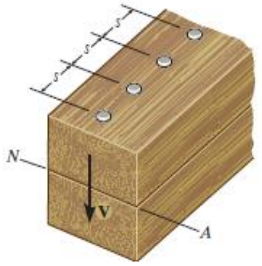
I = the moment of inertia of the *entire* cross-sectional area calculated about the neutral axis.

عزم القصور الذاتي لكامل مساحة المقطع العرضي المحسوبة حول المحور المحايد.

Q = *yA*, where *A* is the cross-sectional area of the segment that is *connected to the beam* at the juncture where the shear flow is calculated, and *y* is the distance from the neutral axis to the centroid of *A*.

حيث A هي مساحة المقطع العرضي للقطعة المتصلة إلى الشعاع عند نقطة الاتصال حيث يتم حساب تدفق القص، وy المسافة من المحور المحايد إلى النقطه الوسطى لـ A .

Spacing : $S = \frac{nF}{q}$



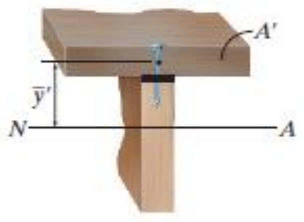
n=عدد المسامير او عناصر التثبيت

F= القوة التي يتحملها كل مسمار او عنصر تثبيت

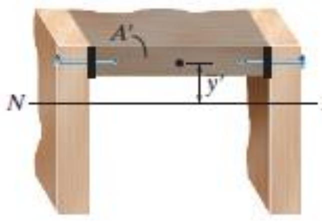
S= المسافة بين المسامير او عناصر التثبيت

q=التدفق القصي

n عدد المسامير بناخدهم من الفرونت فيو (Front view) وبناخد براغي يلي فوق المحور المحايد وليس براغي الشكل



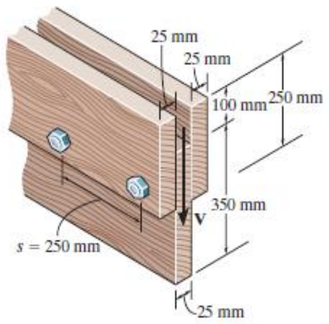
n=1



n=2

n=3

- **EX** : A beam is constructed from three boards bolted together as shown. Determine the shear force in each bolt if the bolts are spaced **s = 250 mm** apart and the shear is **V = 35 kN.**



$$\bar{y} = \frac{2\,(0.125)(0.25)(0.025) + 0.275\,(0.35)(0.025)}{2\,(0.25)(0.025) + 0.35\,(0.025)} = 0.18676 \text{ m}$$

$$I = (2)\left(\frac{1}{12}\right)(0.025)(0.25^3) + 2\,(0.025)(0.25)(0.18676 - 0.125)^2$$

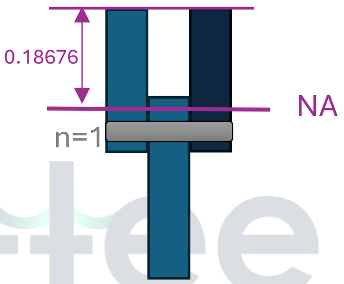
$$+ \frac{1}{12}(0.025)(0.35)^3 + (0.025)(0.35)(0.275 - 0.18676)^2$$

$$= 0.270236\,(10^{-3}) \text{ m}^4$$

$$Q = \bar{y}'A' = 0.06176(0.025)(0.25) = 0.386(10^{-3}) \text{ m}^3$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{35(0.386)(10^{-3})}{0.270236(10^{-3})} = 49.997 \text{ kN/m}$$

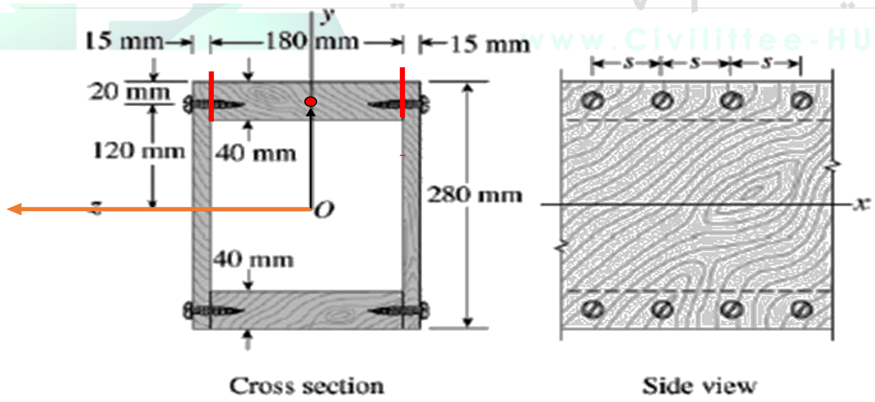
$$F = q(s) = 49.997\,(0.25) = 12.5 \text{ kN}$$



Front

اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة ال
www.Civilittee-HU.com

EX :FIND THE SPACING



$$I = \frac{(210)(280)^3}{12} - \frac{(180)(200)^3}{12}$$
$$= 264.2 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$Q = (180)(40)(140-20)$$
$$= 864 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$f = \frac{VQ}{I} = \frac{(10.5\times10^3)(864\times10^3)}{264.16\times10^6} = 34.3\,\frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$s = \frac{2F}{f} = \frac{2(800)}{34.3} = 46.6 \text{ mm}$$

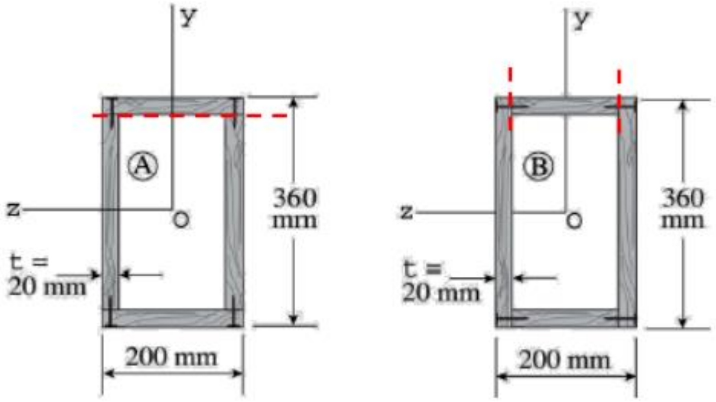
Use 45 mm

$$q = \frac{VQ}{I}\ , \quad S = \frac{nF}{q} \quad \longrightarrow \quad S = \frac{nFI}{VQ}$$

عند تعويض

(q)

Find the spacing for each case



$V = 3.2\text{ kN} \qquad F = 250\text{ N}$

$$I = \frac{(200)(360)^3}{12} - \frac{(160)(320)^3}{12} = 340.69\times10^6\text{ mm}^4$$

طريقة تركيب المادة او الخشب يؤثر على كيفية انتقال القوة عبر المقطع وبالتالي تحدد الجزء الفعلي من العرض b الذي يشارك في تحمل الاحمال.

$$Q = (200)(20)(180-10) = 680\times10^3\text{ mm}^3$$

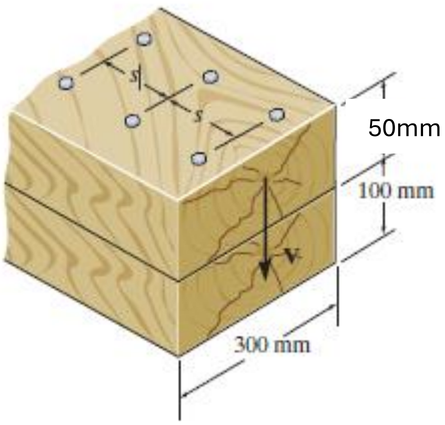
$$s = \frac{2FI}{VQ} = 78.3\text{ mm}$$

$$Q = (160)(20)(180-10) = 544\times10^3\text{ mm}^3$$

$$s = \frac{2FI}{VQ} = 97.9\text{ mm}$$

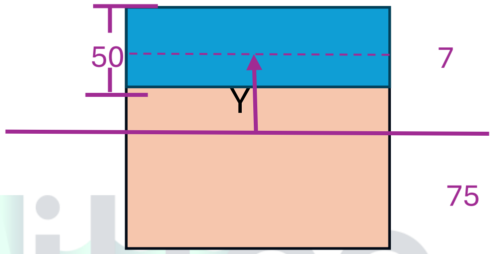
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civilittee-HU.com

EX : The two identical boards are bolted together to form the beam. If the spacing of the bolts is **S= 100 mm** and each bolt has a shear **strength of 15 kN**, and **the allowable shear stress in wood = 7MPa**, determine the maximum shear force V the beam can resist



S=100 ,F=15KN ,$\tau = 7MPa$

$$I = \frac{300 \times 150^3}{12} = 84375000$$



q = $\frac{VQ}{I}$,$S = \frac{nF}{q}$

عند تعويض (q) S=$\frac{nFI}{VQ}$

$$100 = \frac{2 \times 15 \times 10^3 \times 84375000}{v300 \times 50 \times 50}$$

V=33.75KN Take smaller

- $\tau = 1.5\frac{v}{A}$

$$7 = 1.5\frac{V}{300 \times 150}$$

V=210KN

Civiliftee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civiliftee-HU.com

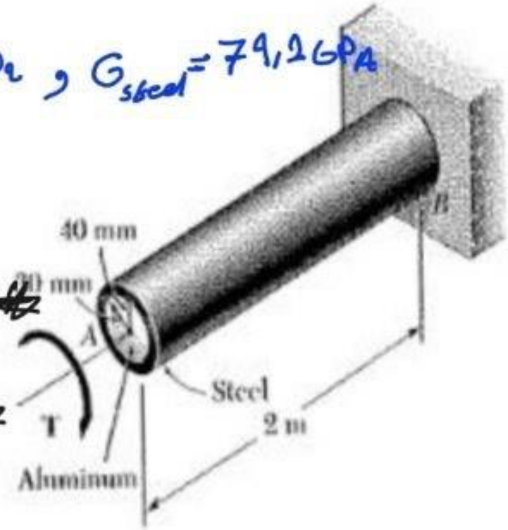
واجبات

Civilittee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civilittee-HU.com

HW 2'

The composite shaft shown is twisted by applying a torque at end A. Knowing that the **maximum shearing stress in the steel shaft is 150 MPa**, determine the corresponding maximum shearing stress in the aluminum core.

G_{steel} = 77.2 GPa and $G_{aluminum}$ = 27GPa



$G_{Al} = 27\,GPa$, $\tau_{max\,steel} = 150\,MPa$, $G_{steel} = 77{,}2\,GPa$

$\tau_{max\,Al} = ?$

$* I_{steel} = \frac{\pi(40^4 - 30^4)}{2} = \boxed{2748893{,}5}$

$* I_{Al} = \frac{\pi(30)^4}{2} = \boxed{1272345{,}02}$

$\tau_{max\,steel} = \frac{Pr}{I} \rightsquigarrow 150 = \frac{P(40)}{2748893{,}5}$

$\rightsquigarrow \boxed{P_{steel} = 10308{,}3\,kN}$

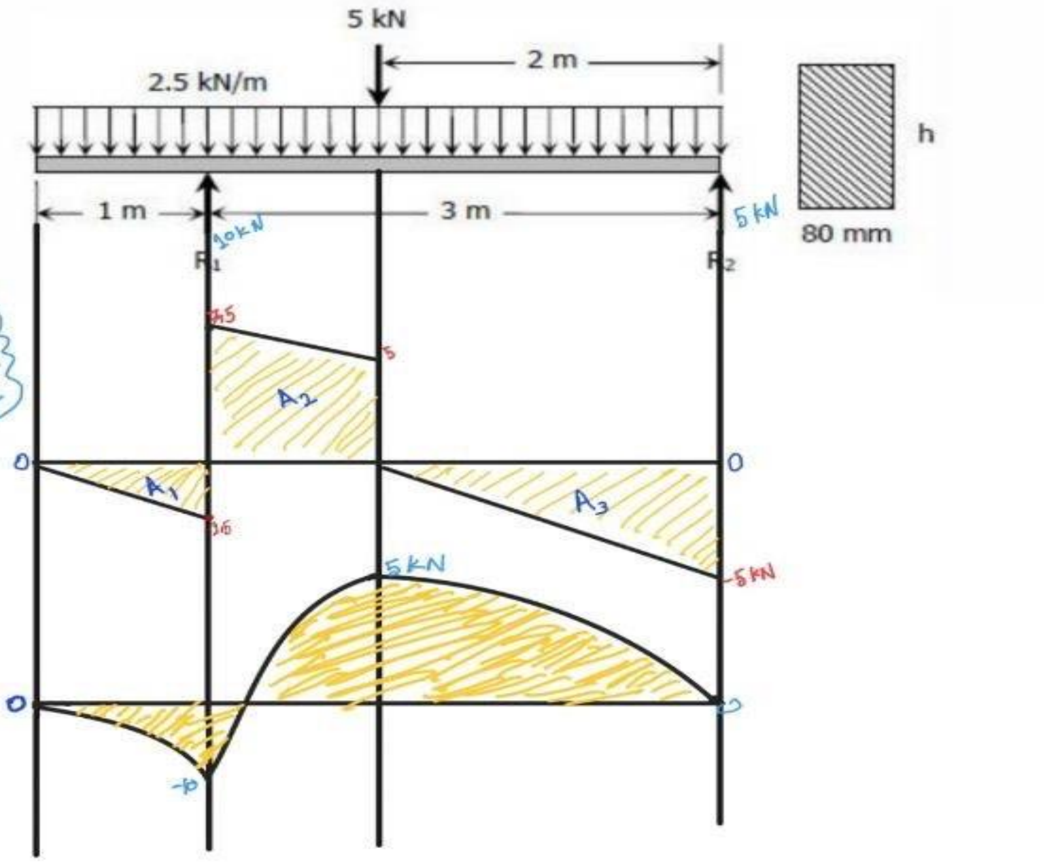
$\delta_{steel} = \delta_{Aluminum} \rightsquigarrow \frac{10308{,}3 * 10^3 * 2000}{77{,}2 * 10^3 * 2748893{,}5} = \frac{P_{Al}(2000)}{27 * 10^3 * 1272345{,}02}$

$\rightsquigarrow \boxed{P_{Aluminum} = 1668{,}7\,kN}$

$* \tau_{max\,Al} = \frac{1668{,}7 * 10^3 (30)}{\frac{\pi(30)^4}{2}} \simeq \boxed{39{,}3\,MPa}$

HW 3

Determine the minimum height h of the beam shown if the flexural stress is not to exceed 20 MPa. R1 and R2 support reactions.



$* M_{max} = 5$ kN·m

Sol:

$\Sigma M_1 = (5)(1) + (2,5)(4)(1) - R_2(3) = 0 \rightarrow R_2 = 5$ kN

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow -2,5(4) - 5 + R_1 + 5 = 0 \rightarrow R_1 = 10$ kN

- Area 1 = $\frac{1}{2}(2,5)(1) = 1,25$ mm²
- Area 2 = $\frac{1}{2}(7,5+5)(1) = 6,25$ mm²
- Area 3 = $\frac{1}{2}(5)(2) = 5$ mm²

$* F_b = \frac{MC}{I} \rightarrow ① \rightarrow F_b = 20$ MPa, $M = 5 \times 10^6$ N·mm

$c = \frac{1}{2} h$

$\rightarrow I = \frac{80(h^3)}{12} = \frac{20}{3} h^3$

$\rightarrow 20 = \frac{5 \times 10^6 (0,5 h)}{\frac{20}{3} h^3} \rightarrow h = 137$ mm

HW 4

For the beam shown:

- Draw the shear and the moment diagrams.
- Find the cross-sectional dimensions of the smallest square beam that can be loaded as shown, if $\tau_{all} = 1$ MPa and $\sigma_{all} = 8$ MPa

Sol.

$\Sigma M_B = 0$

$2 + 5(2) - 3R_A = 0$

$3R_A = 12 \rightarrow R_A = 4\,kN$

$\uparrow \Sigma F_y = 0 \rightarrow -5 + 4 + R_B = 0$

$R_B = 1\,kN$

(1) $\sigma_{all} = 8$ MPa $\rightarrow \sigma_{all} = \frac{Mc}{I}$

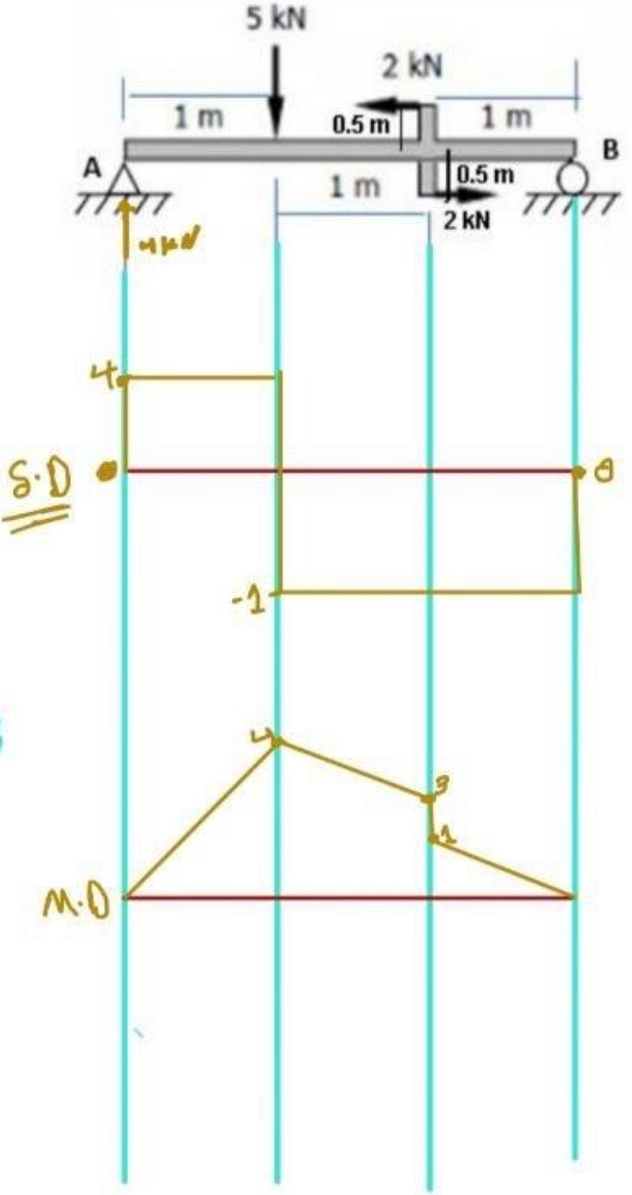
$$8 = \frac{(4 \times 10^3)(b/2)}{\frac{1}{12}(b)(b^3)}$$

$$\rightarrow 8 = \frac{6 \times 4 \times 10^3}{b^3} \rightarrow b = 144.22\ mm$$

(2) $\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}$ $\quad \tau_{all} = 1$ MPa

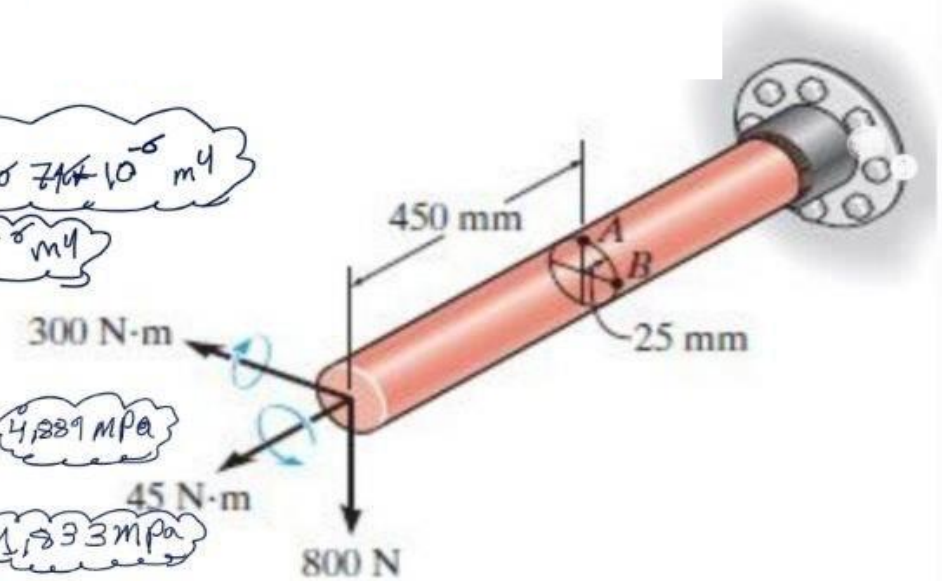
$$1 = \frac{3(4)(1000)}{2b^2}$$

$$\rightarrow b = 77.46\ mm$$



HW 5

The solid shaft is subjected to the loading as shown. Determine the principal stresses acting at point *A* and B.



* at point A

$I_x = I_y = \frac{\pi}{4}(0,025)^4 = 0,306796 \times 10^{-6}\ m^4$

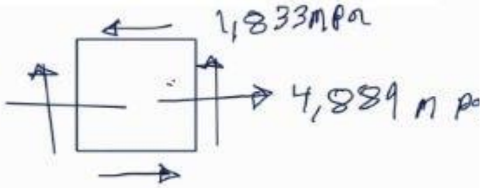
$J = \frac{\pi}{2}(0,025)^4 = 0,61359 \times 10^{-6}\ m^4$

$* Q_A = 0$

$\sigma_A = \frac{M_x c}{I} = \frac{60(0,025)}{0,306796 \times 10^{-6}} = 4,889\ MPa$

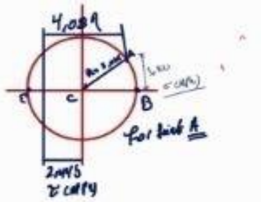
$\tau_A = \frac{T_y c}{J} = \frac{45(0,025)}{0,613592 \times 10^{-6}} = 1,833\ MPa$

$* \sigma_x = 4,889\ MPa, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -1,833\ MPa$



$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}}$

$= \frac{4,889 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4,889}{2}\right)^2 + (-1,833)^2}$



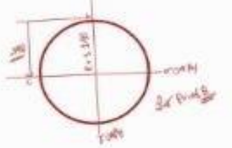
$\sigma_1 = 5,50\ MPa$

$\sigma_2 = 0,611\ MPa$

* at point B

$I_x = I_y = \frac{\pi}{4}(0,025)^4 = 0,306796 \times 10^{-6}\ m^4$

$J = \frac{\pi}{2}(0,025)^4 = 0,61359 \times 10^{-6}\ m^4$



$* Q_B = \bar{y} A = \frac{4(0,025)}{3\pi} \cdot (0,5 \cdot \pi \cdot 0,025)^2 = 10,4167 \times 10^{-6}\ m^3$

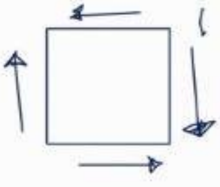
$\sigma_B = 0$

$\tau_B = \frac{V_z Q_B}{I b} - \frac{T_y c}{J} = \frac{800 \cdot (10,4167)(10^{-6})}{0,306796 \times 10^{-6} \cdot 0,05} - \frac{45(0,025)}{0,61359 \times 10^{-6}} = -1,290\ MPa$

$* \sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -1,290\ MPa$

$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}}$

$= 0 \pm \sqrt{(0)^2 + (-1,290)^2}$



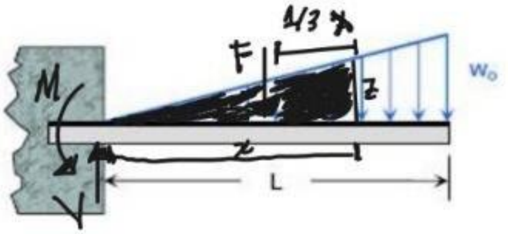
$\sigma_1 = 1,29\ MPa$

$\sigma_2 = -1,29\ MPa$

HW 6

Find the equation of the elastic curve for the cantilever beam shown and check the max deflection using the unit load method

Draw the elastic curve



Sol:

$V = \frac{1}{2} W_o L$

$M = \frac{1}{2} W_o L (\frac{2}{3} L)$

$M = \frac{1}{3} W_o L^2$

$\frac{Z}{X} = \frac{W_o}{L} \rightarrow Z = \frac{W_o}{L} x$

$* F = \frac{1}{2} Z X \rightarrow F = \frac{1}{2} (\frac{W_o}{L} X) \rightarrow \frac{W_o}{2L} x$

$EIy'' = -M + VX - F(\frac{1}{3}x)$

$= -\frac{1}{3} W_o L^2 + \frac{1}{2} W_o L x - \frac{1}{3} x (\frac{W_o}{2L} x^2)$

$= -\frac{W_o L^2}{3} + \frac{W_o L}{2} x - \frac{W_o x^3}{6L}$

$= -\frac{W_o L^2}{3} x + \frac{W_o L}{4} x^2 - \frac{W_o x^4}{24L} + C_1$

$= -\frac{W_o L^2}{6} x^2 + \frac{W_o L}{12} x^3 - \frac{W_o}{120L} x^5 + C_1 x + C_2$

$*$ At $x = 0$, $y' = 0$ } → therefore $C_1 = 0$

At $x = 0$, $y = 0$ } // $C_2 = 0$

*there fore the equation of the elastic curve is

$EIy = -\frac{W_o L^2}{6} x^2 + \frac{W_o L}{12} x^3 - \frac{W_o x^5}{120L}$

أسئلة سنوات

Name: ....

ID: ....

Duration: 1 hours

2nd 2022-2023

Seat No.

1GBAL

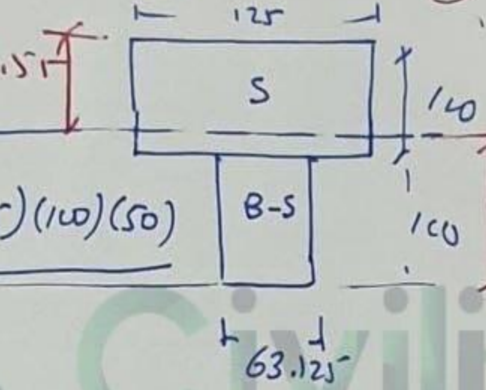
The Hashemite University

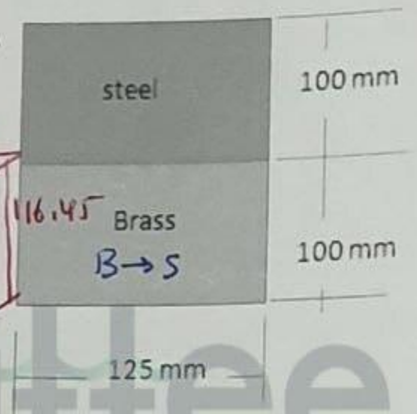
Mechanics of Structures (2104011212)

Second Exam

Q.1 (8 points) The composite beam is made of steel and Brass. If the allowable stress for the steel is σs = **180 MPa** and for brass is σb = **60 MPa**, determine the maximum moment that can be applied to the beam. Assume **E_s=200 GPa and E_b= 101 MPa.**

$B \rightarrow S \Rightarrow n = \frac{101}{200} = 0.505$ ①





$$\frac{(125)(100)(150)+(63.125)(100)(50)}{18812.5}$$

$\bar{Y} = 116.45$ mm

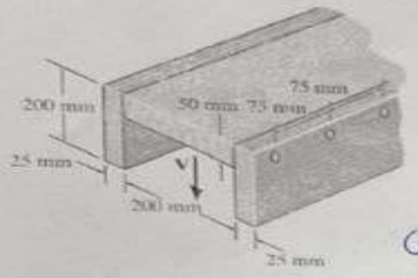
$$I_T = \frac{(125)(100)^3}{12} + (125)(100)(150-116.45)^2 + \frac{(63.125)(100)^3}{12} + (63.125)(100)(116.45-50)^2$$

$= 24486697.92 + 33133907.45 = 57620605.37$ mm^4

$$\sigma_s = 180 = \frac{(M)(83.55)}{57620605.37} \Rightarrow M = 124 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_B = 60 = \frac{M(116.45)}{57620605.37} \times 0.505 \Rightarrow M = 58.8 \text{ kN.m} \leftarrow *$$

Q2. The beam is subjected to a shear of Determine the average shear stress developed in each nail if the nails are spaced 75 mm apart on each side of the beam. Each nail has a diameter of 4 mm. V = 2 kN. (8 Points)



$S = 75$

$f_{n} = \frac{Q}{T} \times S = 997.3 N$

$Q_T = \frac{VQ}{I}$

$= \frac{(2)(375\times10^3)}{56.4\times10^6} \times 75$

1) $V = 2$

2) $I = 56.4\times10^6$

3) $Q = A\bar{y} = 500\times200\times37.5 = 375\times10^3$

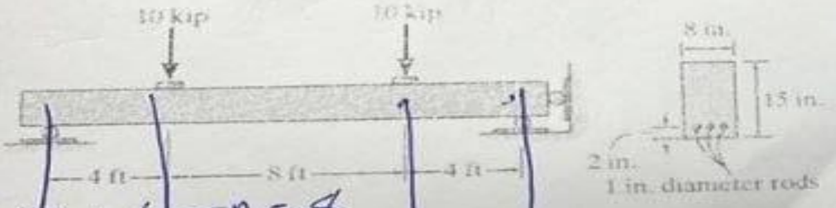
Civilittee
اللجنة الأكاديمية للهندسة المدنية

Q 3. The reinforced concrete beam is used to support the loading shown. Determine the absolute maximum normal stress in each of the steel reinforcing rods and the absolute maximum compressive stress in the concrete. Assume the concrete has a high strength in compression and yet neglect its strength in supporting tension. Modulus of elasticity of steel is 29×10^6 psi and 3.6×10^6 psi for concrete (8 Points)

$E_s = 29\times10^6$ $n = 8$

$E_c = 3.6\times10^6$ $nA = 18.8$

$A = \frac{\pi}{4}(1)^2 = \frac{\pi}{4} = 0.78$



~~$E_s = 29\times10^6$ $n = 8$~~

$E_c = 3.6\times10^6$ $nA = 18.8$

The Hashemite University

Structural Mechanics

Second Exam

Name:

Serial Number:

ID:

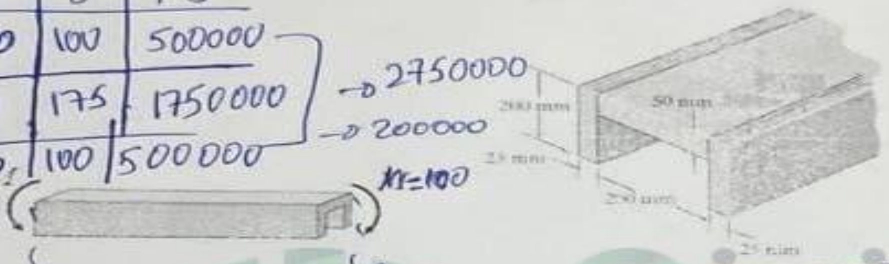
Q 1. A pure bending moment of M= 100 kN.m is applied to the member shown below.

$\bar{A}$	$\bar{y}$	$\bar{A}y$
×200	100	500000
×50	175	1750000
×200	100	500000

→ 2750000

→ 200000

M=100



$$\frac{2750000}{200000} = 13.75$$

Find

a) The maximum compressive stress in the member (4 Points).

$$I = \frac{200 \times 50^2}{12} + 200 \times 50 (137.5)^2 + 2\left(\frac{25 \times 200^3}{12} + 25 \times 200 (137.5)^2\right)$$

$$= 16.1 \times 10^6 + 40.3 \times 10^6 = 56.4 \times 10^6$$

$$\sigma_c = -\frac{MC}{I} = -\frac{(100)(62.5)}{56.4 \times 10^6}$$

$$= 1108 \text{ N/mm}$$

b) The maximum tensile stress in the member (4 Points).

$$\sigma_T = \frac{-MC}{I} = \frac{-(100)(137.5)}{56.4 \times 10^6}$$

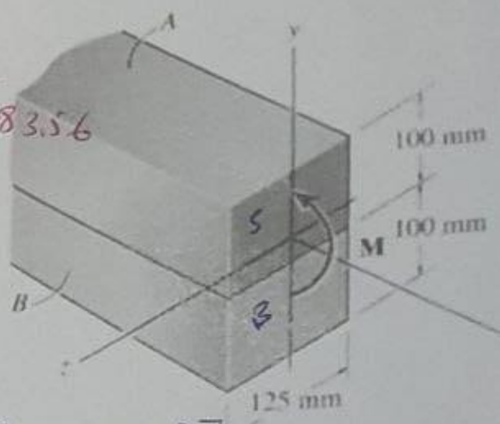
Civilittee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية

Summer 2022-2023

Mechanics of Structures (2104011212)

Second Exam

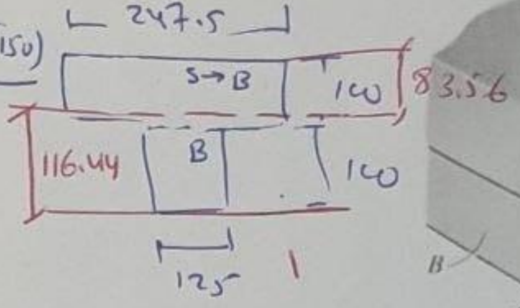
Q.1 (8 points) The composite beam is made of steel and Brass. If the allowable stress for the steel is **σs = 180 MPa** and for brass is **σb = 60 MPa**, determine the maximum moment that can be applied to the beam. Assume **E_s=200 GPa and E_b= 101 MPa.**



$n = \frac{E_s}{E_B} = \frac{200}{101} = 1.48$

$\bar{Y} = \frac{(100)(125)(50) + (247.5 \times 100)(150)}{37250}$

$\bar{Y} = 116.44$



$\sigma = \frac{My}{I}$

$\sigma_b = \frac{(M)(116.44)}{114.162 \times 10^6} = 60 \Rightarrow$

$M = 58.83 \text{ kN.m}$

$\sigma_s = \frac{(M)(1.48)(83.56)}{114.162 \times 10^6} = 180$

$= 124.2 \text{ kN.m}$

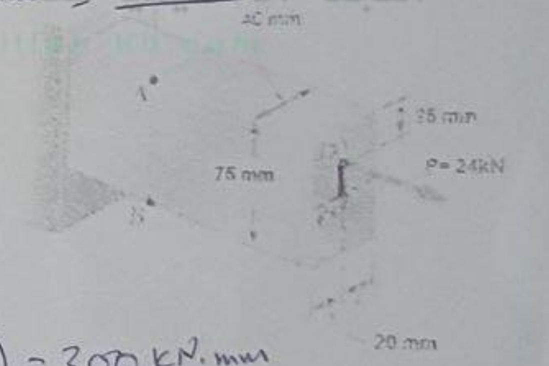
$I = \left[\frac{125 \times 100^3}{12} + \frac{247.5 \times 100^3}{12}\right] + (125 \times 100)(50 - 116.44)^2 + (100 \times 247.5)(150 - 116.44)^2$

$= 31041666.67 + 83120180 = 114.1626 \times 10^6 \text{ mm}^4$

$\therefore M_{max}$ is smaller $= 58.83$

Q.2 (5 points) Determine the maximum stresses at A and B

Plot the stress distribution along the depth of the cross-section.



$A = 40 \times 75 = 3000 \text{ mm}^2$

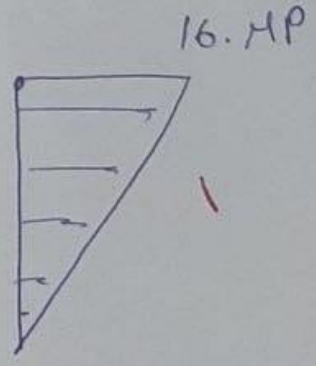
$I = \frac{(40)(75)^3}{12} = 1406250 \text{ mm}^4$

24000 N

$M = 24(37.5 - 25) = 300 \text{ kN.mm}$

$\sigma_A = \frac{24000}{3000} + \frac{(300000)(37.5)}{1406250} = 16 \text{ MPa}$

$\sigma_B = \frac{24000}{3000} - \frac{(300000)(37.5)}{1406250} = 0$

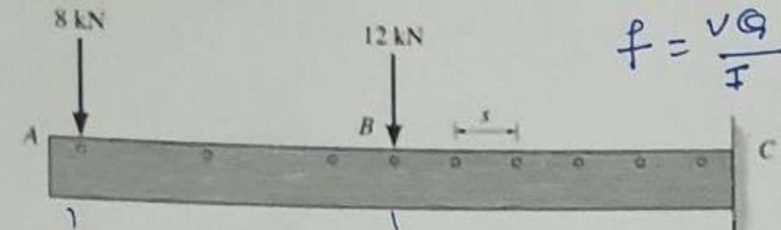


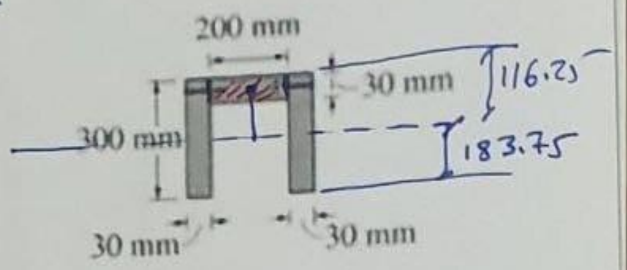
CivilTec
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية

Q.2 (5 points) The beam is constructed from three boards as shown . If each nail can support a shear force of 300 N, determine the maximum spacing **S** of the nails within region BC. Knowing that the **centroid of the section is 183.75 mm** from the bottom and **I =271.5x10⁶ mm⁴**

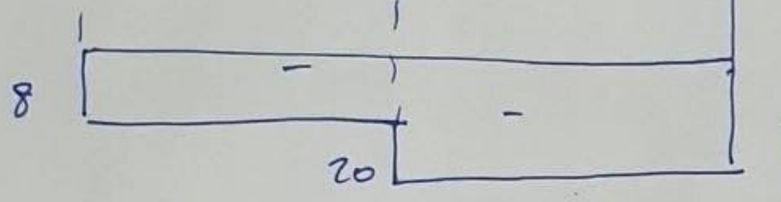
F

$f = \frac{VQ}{I}$





S.D



$V_{BC} = 20\ kN$, $n = 2$

$Q = (200)(30)(116.25 - 15)$

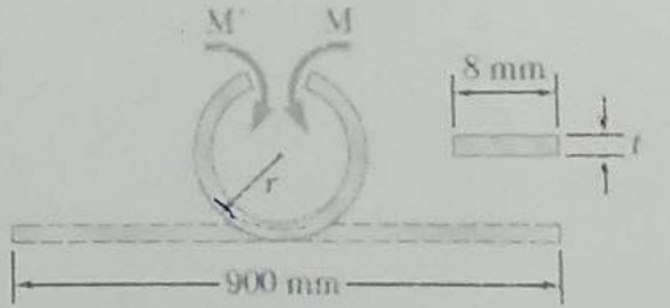
$= 607500$

$f = \frac{VQ}{I} = \frac{(20\times10^3)(607500)}{271.5\times10^6} = 44.75$

$S = n\frac{F}{f} = \frac{(2)(300)}{44.75} = 13.4\ mm \approx 15\ mm$

Q.3 (5 points) 900-mm strip of steel is bent into a full circle by two couples applied as shown. Determine (*a*) the maximum **thickness *t*** of the strip if the allowable stress of the steel is **420 MPa**, (*b*) the corresponding **moment *M*** of the couples. Use ***E*** **=200 GPa.**

$900 = 2\pi\rho \Rightarrow \rho = 143.24\ mm$



$\sigma = E\epsilon \Rightarrow 420 = 200\times10^3\epsilon$

$\epsilon = 2.1\times10^{-3}$

$\epsilon = \frac{y}{\rho_{143.24}} = 2.1\times10^{-3} \Rightarrow y = 0.30$

$t = 2y = 0.6\ mm$

$I = \frac{(8)(0.6)^3}{12} = 0.144$

$\sigma = 420 = \frac{My}{I} = \frac{(M)(0.3)}{0.144} \Rightarrow M = 201.6\ N\cdot mm$

CivilHee
اللجنة الأكاديمية
www.CivilHee-HU.com

Q.2 (8points) Determine the **minimum height h** of the beam shown, if the flexural stress is not to exceed 20 MPa

$\Sigma M_A = 0 \quad \sigma(-2.5)(4)(1) - (5)(1) + 3B_y = 0$

$B_y = 5$

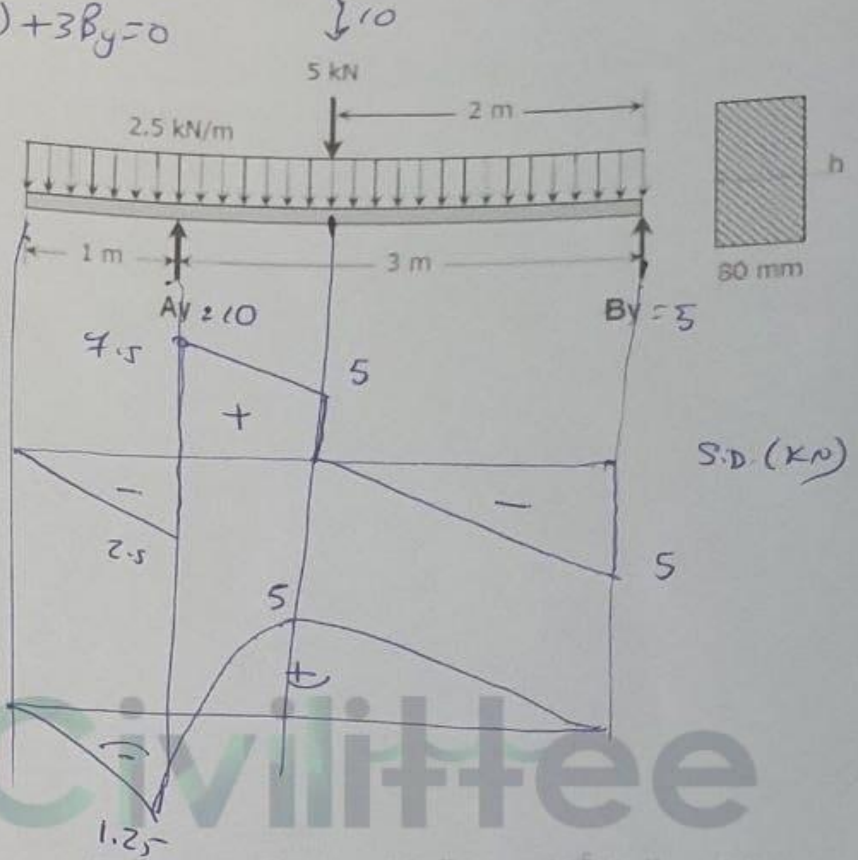
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y = 10$

$M_{max} = 5 \text{ kN.m}$

$\sigma = \frac{My}{I} = 20$

$20 = \frac{(12)(5\times10^6)(h/2)}{80 h^3}$

$h = 136.9 \simeq \underline{137 \text{ mm}}$



CivilTec
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية

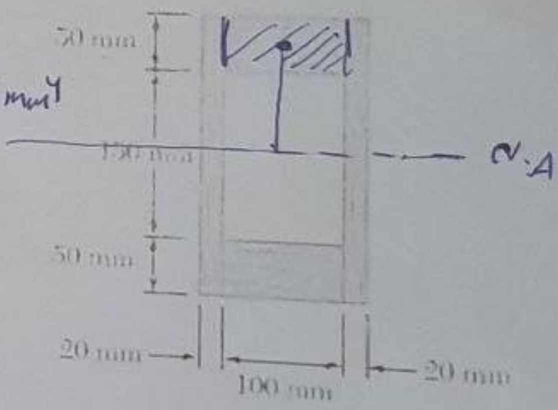
Q.4. (4 points) for the built-up beam shown, the allowable average shearing stress in the glued joints is 350 kPa, determine the largest permissible vertical shear in the beam.

$Q = 100 \times 50 \times 100 = 5\times10^5 \text{ mm}^3$

$I = \frac{140 \times 250^3}{12} - \frac{100 \times 150^3}{12} = 154166666.7 \text{ mm}^4$

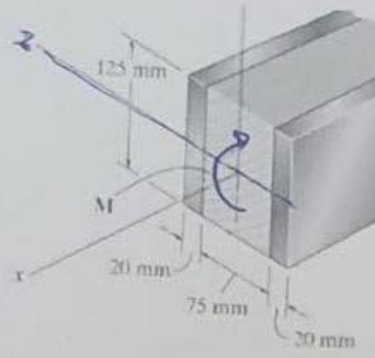
$\tau = \frac{VQ}{Ib} = 350\times10^{-3} = \frac{V \times 5\times10^5}{(154166666.7)(100)}$

$\underline{V = 10.74 \text{ KN}}$



Q.4 (5 Points) The composite beam consists of a wood core and two plates of steel.

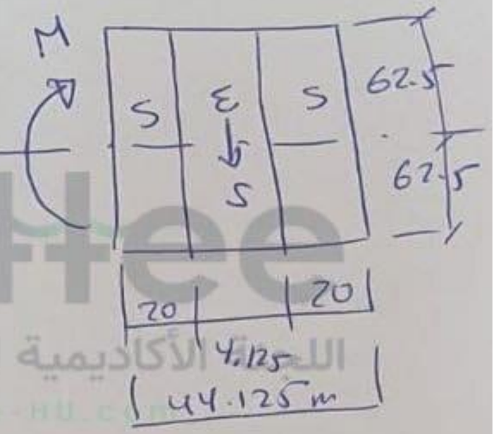
- Determine the maximum moment that can be applied to the beam. If $\sigma_{allowable}$ **for wood = 30 MPa** and $\sigma_{allowable}$ **for steel is 100 MPa**
- $E_w = 11$ **GPa and** $E_{st} = 200$ **GPa**
- What is the maximum stress in the wood and steel due to the maximum moment?



wood → steel

$$n = \frac{11}{200} = 0.055$$

$$I_T = \frac{(44.125)(125)^3}{12} = 7181803.4 \text{ mm}^4$$



$$\sigma_w = \frac{nMy}{I} = \frac{(0.055)(M)(62.5)}{7181803.4} = 30$$

$$M = 62.68 \text{ kN.m}$$

$$\sigma_s = \frac{My}{I} = \frac{(M)(62.5)}{7181803.4} = 100 \Rightarrow$$

$$M = 11.5 \text{ kN.m} \quad \text{Answer}$$

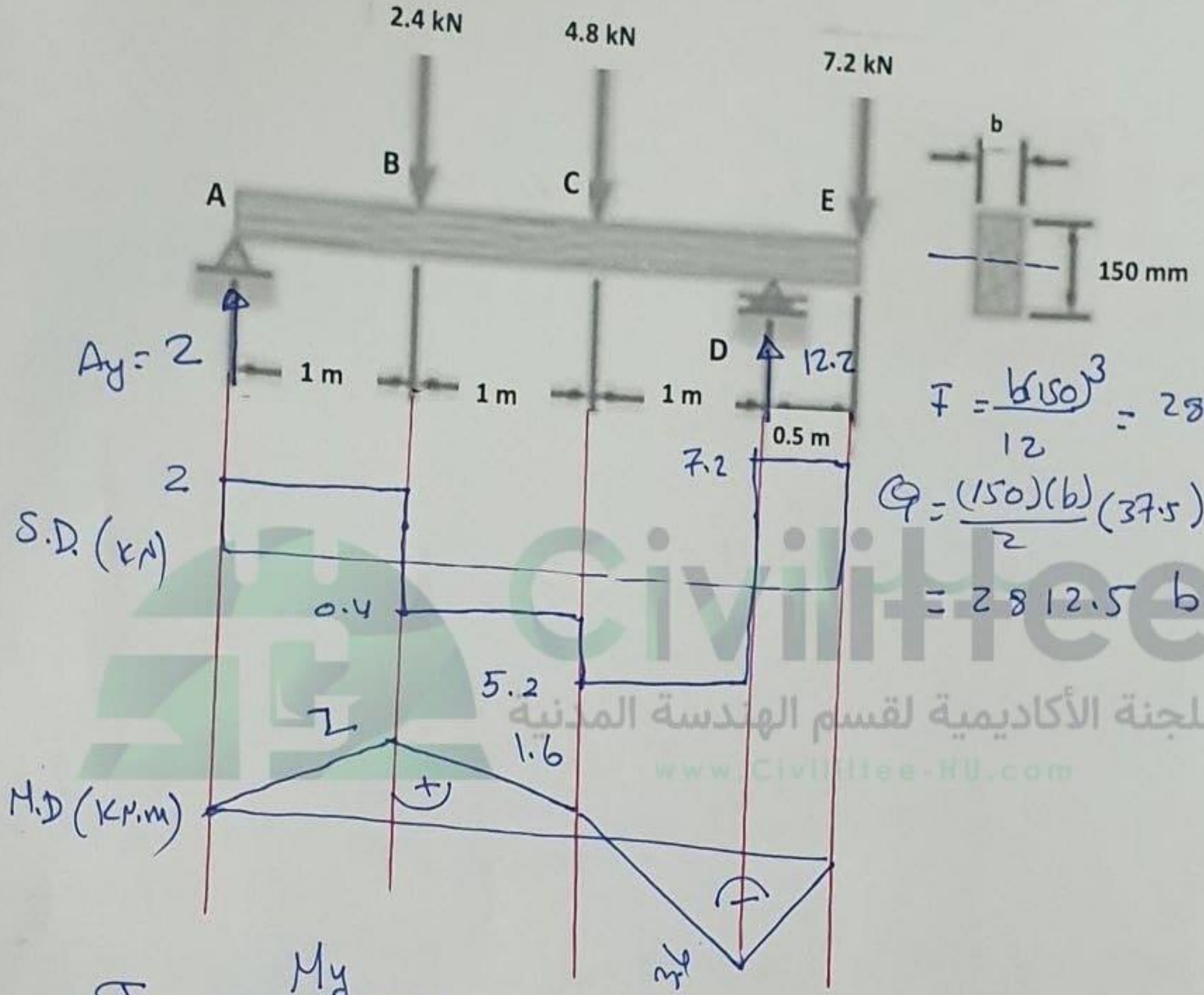
$$\therefore \sigma_s = 100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_w = \frac{(11.5 \times 10^6)(0.055)(62.5)}{7181803.4} = 5.5 \text{ MPa}$$

Civilittee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.Civilittee-HU.com

Q.4 (8points) For the beam and loading shown, determine the **minimum required** width b, knowing that for the grade of timber used, σ_{all}= 12 MPa and τ_{all} =825 kPa.

(Hing at A and Roller at D)



$$I = \frac{b(150)^3}{12} = 281250\,b$$

$$Q = \frac{(150)(b)}{2}(37.5) = 2812.5\,b$$

$$\sigma_{Max} = \frac{My}{I} = 12$$

$$= \frac{10^6 \times 3.6 \times (150/2)}{281250b} = 12 \Rightarrow b = 80\,mm$$

$$\tau_{Max} = 825 \times 10^{-3} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{(7.2 \times 1000)(2812.5b)}{(281250b)(b)} \Rightarrow b = 87.3\,mm$$

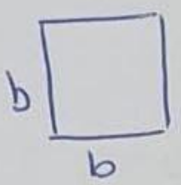
Take larger

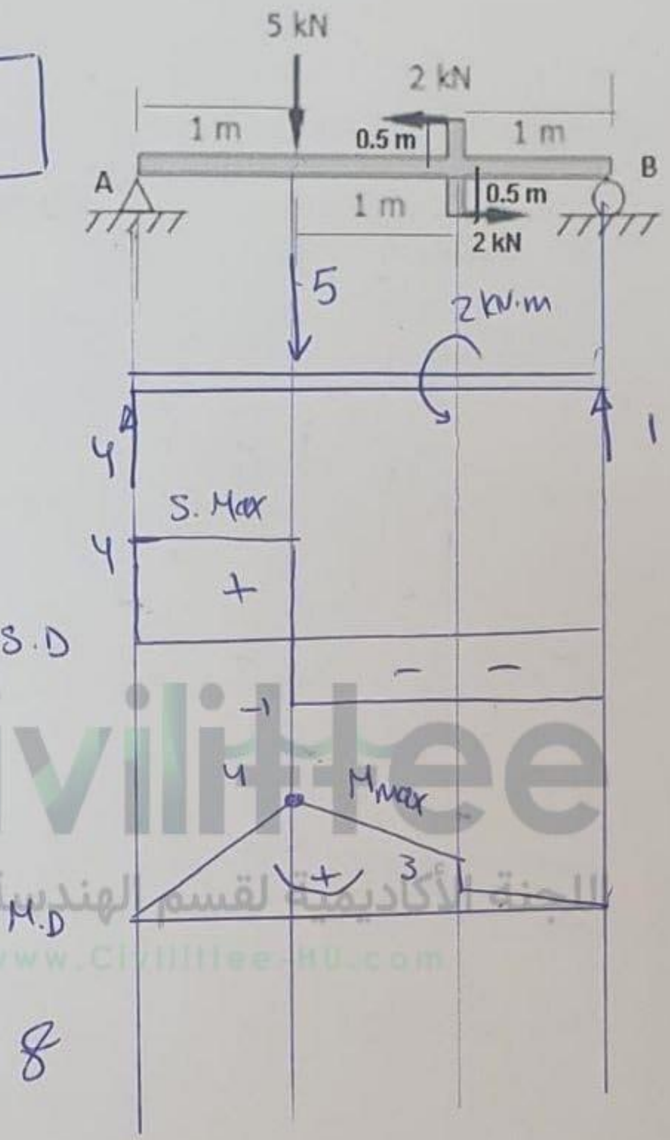
CivilHee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.CivilHee-HU.com

Q.1 (6 points) For the beam shown:

- Draw the shear and the moment diagrams.
- Find the cross-sectional dimensions of the smallest square beam that can be loaded as shown, if $\tau_{all} = 1$ MPa and $\sigma_{all} = 8$ MPa

Reactions





$\Sigma M_A = 0$

$-(5)(1) + 2 + 3B_y = 0$

$B_y = 1\,kN$

Max shear = 4 kN

$\tau_{all} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}$

$1 \times 10^3 = (\frac{3}{2})(\frac{4000}{b^2}) \Rightarrow$

$b = 77.46$ mm

Max M = 4 kN.m

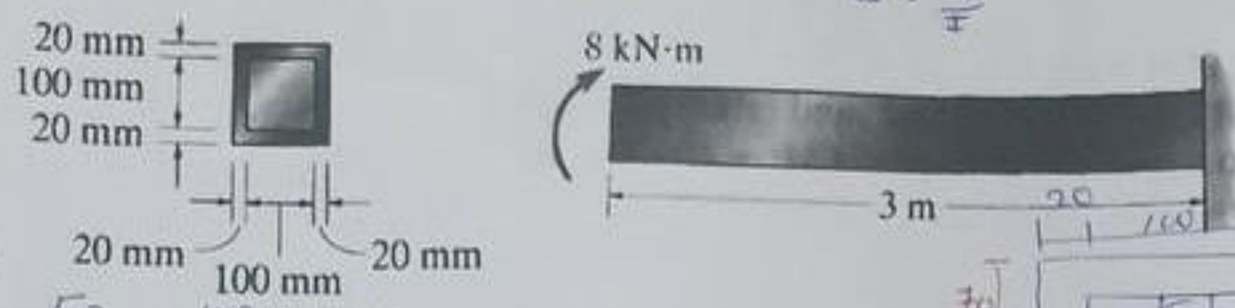
$\sigma_{all} = \frac{My}{I} = \frac{(4\times10^6)(b)12}{2b^4} = 8$

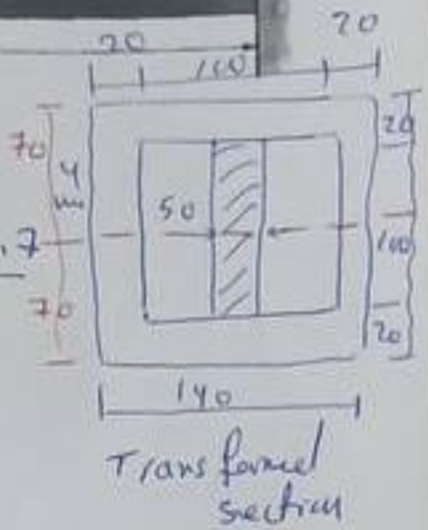
$b = 144.22$ mm ← Answer

CivilItee
اللجنة الأكاديمية لقسم الهندسة المدنية
www.civilittee-hu.com

Q.1 (6 points). The member has a brass core bonded to steel casing. If the couple moment of 8 kN.m is applied at its end, determine the maximum bending stress in the steel and brass. E_{st}= 200GPa, and E_{br} = 100GPa.

$\sigma = \frac{My}{I}$





$B_r \rightarrow st$

$n = \frac{E_B}{E_S} = \frac{100}{200} = 0.5$

$I_T = \frac{140 \times 140^3}{12} - \frac{100 \times 100^3}{12} + \frac{50 \times 100^3}{12} = 27846666.7$

$\sigma_{st} = \frac{(8 \times 10^6)(70)}{27846666.7} = 20.11 \text{ MPa}$

$\sigma_{Br} = \frac{(8 \times 10^6)(50)(0.5)}{27846666.7} = 7.182 \text{ MPa}$

Q.2 (6 points) The two identical boards are bolted together to form the beam. If the spacing of the bolts is S= 100 mm and each bolt has a shear strength of 15 kN, and the allowable shear stress in wood = 7MPa, determine the maximum shear force V the beam can resist.

$\tau_{all} = 7 MPa$
$S = 100$
$F = 15 KN$

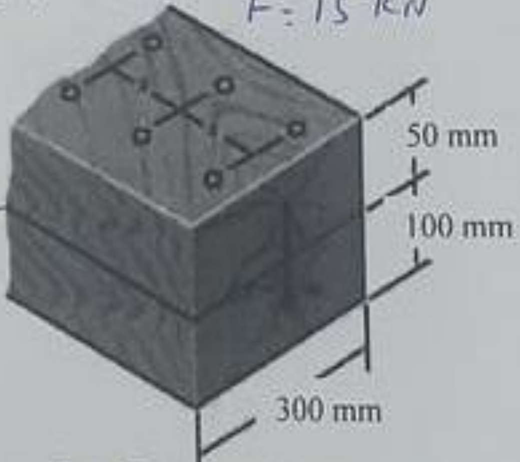
$S = \frac{nF}{f}$, $f = \frac{VQ}{I}$, $I = \frac{(300)(150)^3}{12} = 84375000$

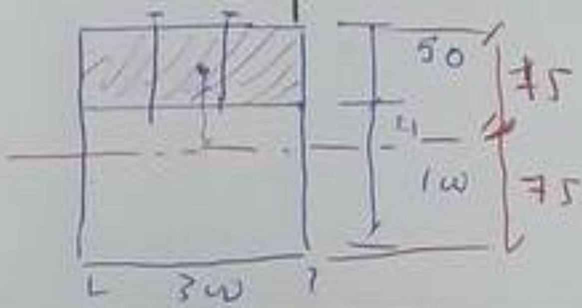
$100 = \frac{(2)(15 \times 10^3)(84375000)}{V(300 \times 50 \times 50)}$

$V = 33.75$ KN ⟵⟶ ✱ Take smaller

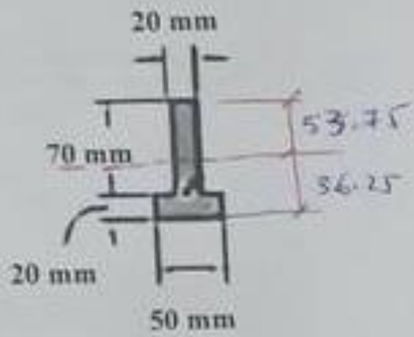
chk shear in wood

$\tau = 7 = 1.5 \frac{V}{(300 \times 150)} \Rightarrow V = 210$ KN





Q.3 (8 points) A moment diagram of a given beam is show. Calculate the maximum compressive and tensile stresses developed on the beam section shown.



$$\bar{Y} = \frac{(20)(50)(10) + (70 \times 20 \times 55)}{2400}$$

$= 36.25$ mm

$$I = \frac{50 \times 20^3}{12} + (20)(50)(36.25-10)^2 + \frac{20 \times 70^3}{12} + (20 \times 70)(36.25-55)^2$$

$= 1786249.997\ mm^4$

Max +ve moment 39 kNm

$$\sigma = \frac{(39 \times 10^6)}{1786249.999} \begin{Bmatrix} -53.75 \\ 36.25 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1173.55\ MPa\ (C) \\ +791.5\ MPa\ (T) \end{Bmatrix}$$ ← Max Compression

Max -ve Moment = 36 kNm

$$\sigma = \frac{36 \times 10^6}{1786249.997} \begin{Bmatrix} 53.75 \\ -36.75 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1077.24\ MPa\ (T) \\ -726.51\ MPa\ (C) \end{Bmatrix}$$ ← Max Tension

Q.4 (5 points) A shaft of diameter 50 mm, is fixed at its both ends A and B. Determine the maximum shear stress in regions AC and CB of the shaft. G = 70GPa

$\phi = \frac{TL}{GJ_p}$

$\tau = \frac{Tr}{I_p}$

$T_A + T_B = 300$ —① : For Constant GJ

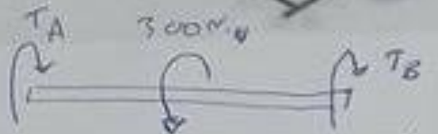
$\phi_{B/A} = 0 \Rightarrow T_A \times 400 = 800 T_B$

$T_A = 2T_B$ ----

$T_B = 0.5 T_A$

Sub in ①

$T_A + 0.5T_A = 300 \Rightarrow T_A = 200$ N.m, $T_B = 100$ N.m



$$\tau_{AC} = \frac{(200 \times 10^3)(25)(2)}{\pi (25)^4} = 8.15\ MPa$$

$$\tau_{BC} = \frac{(100 \times 10^3)(25)(2)}{\pi (25)^4} = 4.08\ MPa$$