New
2018

Civilittee

اللجنة الأكاديمية للهندسة المدنية

ملخص

كالكولاس 1

محمد السفاريني

Contact us :

Civilittee HU | لجنة المدني

Civilittee Hashemite

www.civillttee-hu.com

Scanned with CamScanner

Calculus 1

Domain ⇒ المجال

جميع القيم المسموح بتعويضها داخل الاقتران .

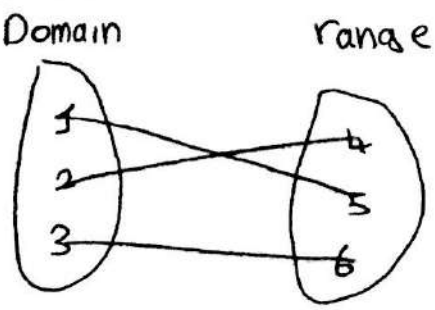
Range ⇒ المدى القيم الناتجة عن تعويض القيم المسموحة داخل الاقتران .

function ⇒ $f(x)$ هو علاقة تربط كل عنصر في المجال بصورة واحدة فقط في المدى .

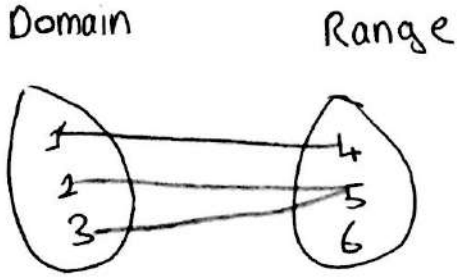
* ملاحظة ⇐ ان خالفت الشرط تسمى علاقة وليس اقتران .

$f(x) = 3$ ← Range

Domain



Function



Not function

Scanned by CamScanner

Example 1

$f(x) = x^2$ find $f(0), f(2), f(-1)$?

$f(0) = 0$

$f(2) = 4$

$f(-1) = 1$

توضيح ⇐
عوض بدل x الرقم
الموجود داخل القوس

⊛ properties of absolute value function
خصائص القيمة المطلقة

① $|-a| = a$ المطلق دائما يعطي قيمة موجبة

② $|ab| = |a||b|$

③ $\left|\frac{a}{b}\right| = |a| / |B|$

④ $|a+b| \leq |a| + |b|$

⑤ $\sqrt{x^2} = |x|$

⑥ $|x| < a$

$-a < x < a$

⑦ $|x| > a$

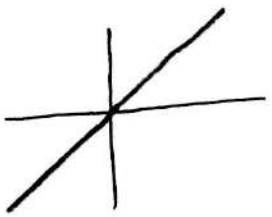
$x > a$ or $x < -a$

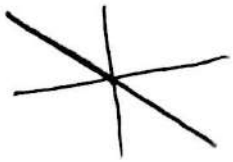
⑧ $|x| = a$

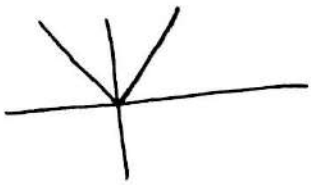
$x = \pm a$

Scanned by CamScanner

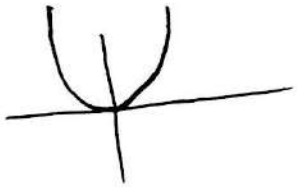
* Graphs of Some function ⇒

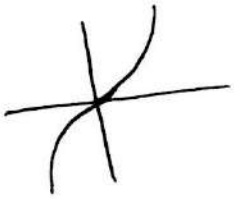
$f(x) = x$ 

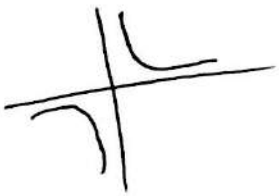
$f(x) = -x$ 

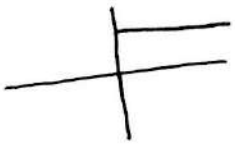
$f(x) = |x|$ 

$f(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = x^n$
n : عدد زوجي 

$f(x) = x^n$
n : عدد فردي 

$f(x) = \frac{1}{x}$ 

$f(x) = c$
ثابت 

ملاحظة هامة ⇐ نستطيع رسم جميع هذه الرسومات عن طريق الجدول

و هكذا !

x	-1	0	1	
f(x)				

Scanned by CamScanner

⊛ قبل البدء بأسئلة المجال يوجد قواعد مهمة جداً

① يجب أن يكون ما داخل الجذر الزوجي عدد أكبر من الصفر أو يساويه .

② عند وجود $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$ ممنوع يكون المقام يساوي صفر .

Example 2

Find the domain ?

① $f(x) = x^2 + 1$

② $f(x) = \sqrt{3x+9}$

③ $f(x) = \frac{1}{x-5}$

④ $f(x) = \sqrt{x^3 - 8}$

⑤ $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$

Solution ⇒

① R or $(-\infty, \infty)$

② $3x + 9 \geq 0$

$3x \geq -9$

$x \geq -3$

دائماً مفتوحة ← $[-3, \infty)$ ← لكي نعرف أنها مغلقة [أو مفتوحة (عوض الرقم في المدخول ان

④

Scanned by CamScanner

③ $x - 5 = 0$

$x = 5$ $\quad R - \{5\}$

④ $x^3 - 8 \geq 0$

$x^3 \geq 8$

$x \geq 2$ $\quad [2, \infty)$

عوض 2 في الاقتران

$\sqrt{(2)^3 - 8} = 0$

جواب مقبول لذلك

وضعنا خيرة منطقة

⑤ R or $(-\infty, \infty)$

Example 3

find the domain ?

① $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$

② ~~f(x)~~ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$

③ $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$

Solution ⇒

① عندما يكون ألتي من حالة

نأخذ مجال كل حالة ثم

نعمل تقاطع ∩

5

Scanned by CamScanner

$\sqrt{x}$ → $x \geq 0$ $[0, \infty)$

x → $x = 0$ $R - \{0\}$] → نأخذ الأشياء المشتركة

$(0, \infty)$

② $x - 3 \geq 0$

$x \geq 3$

$(3, \infty)$

مفتوحة لأن الجذر في المقام

③ $x - 1 = 0$

$x = 1$

$R - \{1\}$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ $a \neq 0$

Quadratic function → كثيرات حدود درجة ٢

Domain = R

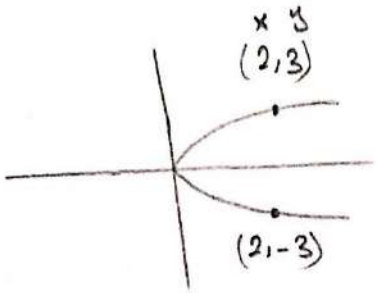
Range → $a > 0$ → $[f\left(\frac{-b}{2a}\right), \infty)$

Range → $a < 0$ → $(-\infty, f\left(\frac{-b}{2a}\right)]$

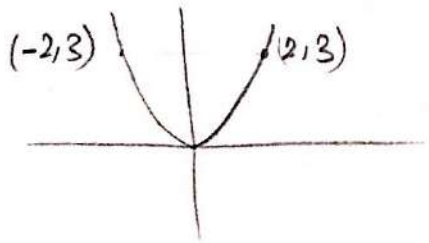
Scanned by CamScanner

* Symmetry التماثل

① about x-axis $(y \longrightarrow -y)$



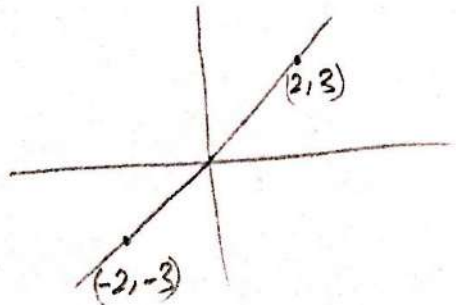
② about y-axis $(x \longrightarrow -x)$



x^n $n \rightarrow$ عدد زوجي

دائماً متماثلة حول y-axis

③ about origen $(x \rightarrow -x \;,\; y \rightarrow -y)$



x^n $n \rightarrow$ عدد زوجي

دائماً متماثلة حول

x-axis

Scanned by CamScanner

زوجي فردي

* Even and odd function

$f(-x) = f(x) \longrightarrow$ even function (Symmetric about y-axis)

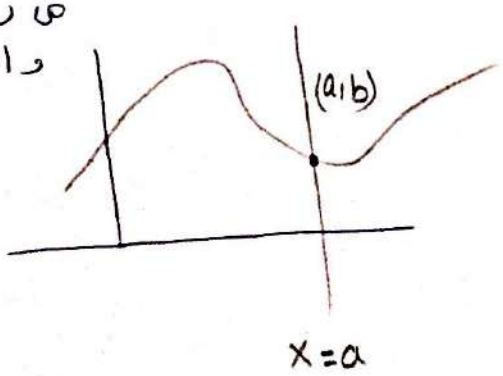
$f(-x) = -f(x) \longrightarrow$ odd function (symmetric about origin)

$f(-x) \neq f(x)$ or $-f(x) \longrightarrow$ neither

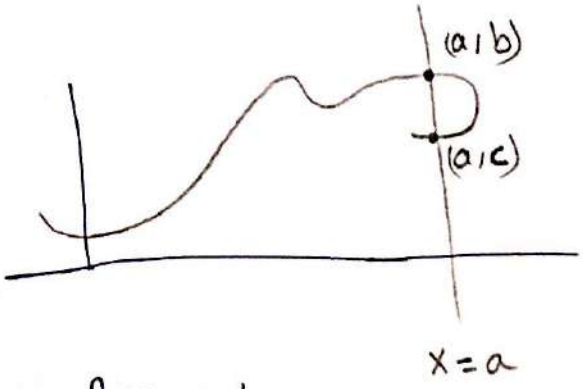
* Vertical line test اختبار الخط العمودي

~~[redacted]~~ ⊛

إذا قطع الخط أكثر من نقطة فإنه لا يمثل اقتران من رمز واحد



$f(a) = b$



$f(a) \neq b$

يوجد أكثر من متغير

Scanned by CamScanner

Example 4

Find The range of $g(x)$?

① $g(x) = x^2 - 2x + 5$

② $g(x) = -x^2 - 4x + 2$

Solution ⇒

① $a > 0$ Range $= \left[f\left(\frac{-b}{2a}\right), \infty \right)$

$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 5$

$f\left(\frac{-(-2)}{2}\right) = f(1) = 1 - 2 + 5 = 4$

$[4, \infty)$

② $a < 0$ Range $= \left(-\infty, f\left(\frac{-b}{2a}\right) \right]$

$a = -1 \quad b = -4 \quad c = 2$

$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-(-4)}{-2} : f(-2) = -4 + 8 + 2 = 6$

$(-\infty, 6]$

Scanned by CamScanner

Example 5

صنف

Classify the function as even, odd or neither

① $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

② $f(x) = x^{-5}$

③ $f(x) = x + 1$

Solution ⟹

① $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1}$

$f(-x) = f(x)$

Even

← بدل كل x في السؤال عوض $-x$

② $f(-x) = (-x)^{-5} = -x^{-5}$

$f(-x) = -f(x)$

odd

③ $f(-x) = -x + 1 = 1 - x$

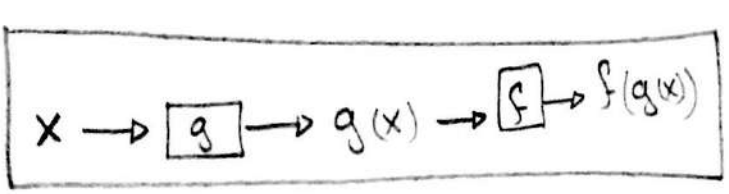
neither

Scanned by CamScanner

* Composition of function التركيب الدوال

$f(x)$, $g(x)$ the composite function

of f with g $= (f \circ g)(x) = f(g(x))$



g بعد f

the composition of g with f $= (g \circ f)(x) = g(f(x))$

f بعد g

Example 6

find $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$?

$f(x) = x + 5$ $\quad g(x) = x^2 - 3$

$f(g(x)) =$ نذهب الى $f(x)$ و نعوض بدل x $g(x)$

$g(x) + 5$

$x^2 - 3 + 5 = \boxed{x^2 + 2}$

Scanned by CamScanner

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 3$

$(x+5)^2 - 3 =$

$\boxed{x^2 + 10x + 22}$

Example 7

Find $(f \circ g)(x)$?

$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{x-1}$

$f(g(x)) = 1 + \frac{1}{g(x)}$

$1 + \frac{1}{\frac{1}{x-1}} = 1 + x - 1 = x$

$\boxed{f(g(x)) = x}$

Example 8

Find $g(x)$?

IF $f(x) = \sqrt{x-5}$, $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 5}$

$f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 5}$

$\sqrt{g(x) - 5} = \sqrt{x^2 - 5}$ ربع الطرفين

$g(x) - 5 = x^2 - 5$

$\boxed{g(x) = x^2}$

Scanned by CamScanner

* Inverse Function الاقتران العكسي

حتى يكون للاقتران اقتران عكسي يجب أن يكون واحد لـ واحد .
one to one

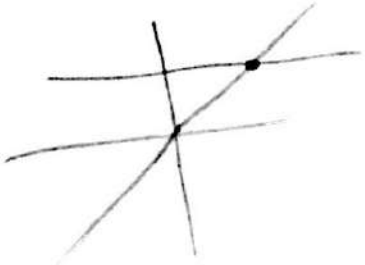
* Horizontal Line Test

إذا قطع المنحنى في نقطة فإنه لا يُعدّ اقتران واحد لـ واحد وفي حالة قطع نقطة واحدة فقط فإنه يكون واحد لـ واحد .

$f(x) = x^2$

Not one to one function

$f(x) = x$



one to one function

Scanned by CamScanner

يوجد طريقة أخرى لمعرفة إذا كان الاقتران واحد لواحد أم لا .

$f(x_1) \neq f(x_2)$ Whenever $x_1 \neq x_2$

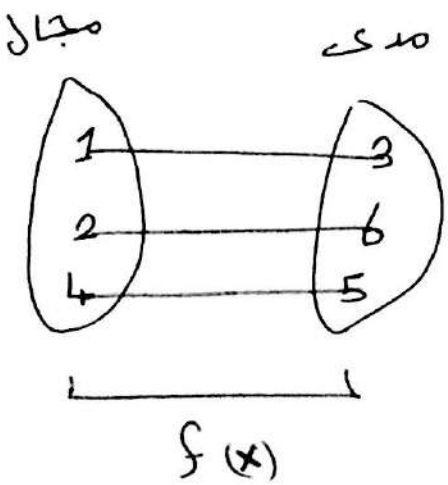
$f(x) = x^2$

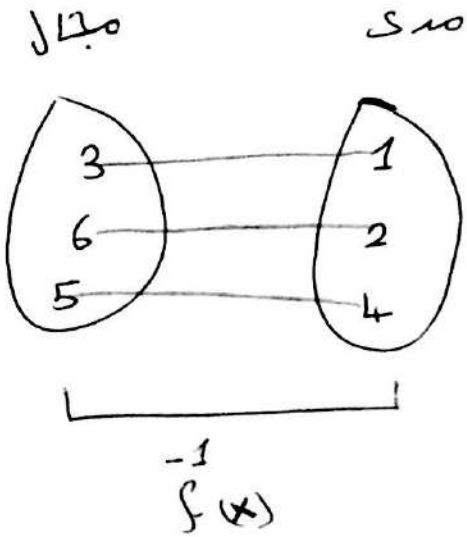
$x = 3 \quad f(3) = 9$

$x = -3 \quad f(-3) = 9$

Not one to one function

⊛ نتابع الحديث عن الاقتران العكسي ⟸





⊛ Domain $f^{-1}(x)$ = Range $f(x)$

⊛ Range $f^{-1}(x)$ = Domain $f(x)$

$f(f^{-1}(x)) = x$ $\quad x \longrightarrow$ تنتمي لـ مجال $f^{-1}(x)$

$f^{-1}(f(x)) = x$ $\quad x \longrightarrow$ تنتمي لـ مجال $f(x)$

Scanned by CamScanner

Example 10 Find $f^{-1}(x)$?

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

$f(x) = y$

$$y = \frac{x}{2} + 1$$

خطوات الحل :-

① اجعل x موضوع القانون

② ضع بدل x y وبدل y x

③ ضع بدل y $f^{-1}(x)$

$$2(y-1) = x$$

$$2y - 2 = x$$

$$2x - 2 = y$$

$$\boxed{2x - 2 = f^{-1}(x)}$$

Example 11 Find $f^{-1}(x)$?

① $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$

② $f(x) = x^2 - 2x$, $x \leq 1$

Solution ⟹

① $y = \frac{1}{x^2}$

$$x = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

Scanned by CamScanner

② $y = x^2 - 2x$

⊛ حكون بدنا نعمل اكمال مربع

$y = x^2 - 2x + 1 - 1$

$\left(\frac{-2}{2}\right)^2 = 1$

$y = (x-1)^2 - 1$

$\sqrt{y+1} = |x-1|$

$x - 1 = \ominus\sqrt{y+1}$ ← بسبب نوع السؤال

$x = 1 - \sqrt{y-1}$

$y = 1 - \sqrt{x-1}$

$f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x-1}$

⊛ نوع آخر من الأسئلة على هذا الموضوع

find domain and Range ?

$f(x) = \frac{x+3}{x-2}$

Domain = [illegible]

$x - 2 = 0$

$x = 2$

$R - \{2\}$

11

Scanned by CamScanner

Range = يُحسب بالدالة

لذلك نقوم بإيجاد $f^{-1}(x)$

وإيجاد المجال وسيكون

مدى $f(x)$ وهو المطلوب

$$y = \frac{x+3}{x-2}$$

$$yx - 2y = x + 3$$

$$yx - x = 3 + 2y$$

$$x(y-1) = 2y + 3$$

$$x = \frac{2y+3}{y-1}$$

$$y = \frac{2x+3}{x-1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

Domain $f^{-1}(x)$ = Range $f(x)$

Domain =

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$R - \{1\}$$

Scanned by CamScanner

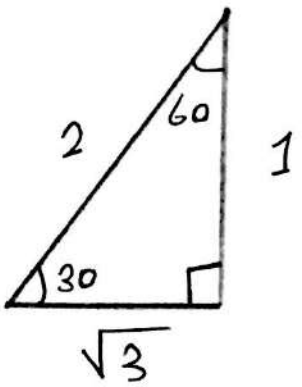
* Trigonometric function "الدوال المثلثية"

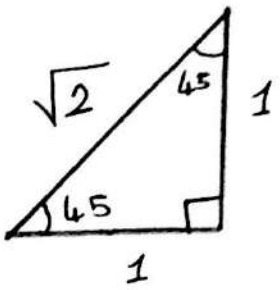
	Domain	Range	Mean	
$\sin(x)$	R	$[-1, 1]$	جا	odd
$\cos(x)$	R	$[-1, 1]$	جتا	even
$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$	$R - \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots\}$	R	ظا	odd

	Domain	Range	Mean		
$\csc(x) =$	$R - \{0, \pi, 2\pi, \dots\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\frac{1}{\sin(x)}$	قتا	odd
$\sec(x)$	$R - \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\frac{1}{\cos(x)}$	قا	even
$\cot(x)$	$R - \{0, \pi, 2\pi, \dots\}$	R	$\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$	ظتا	odd

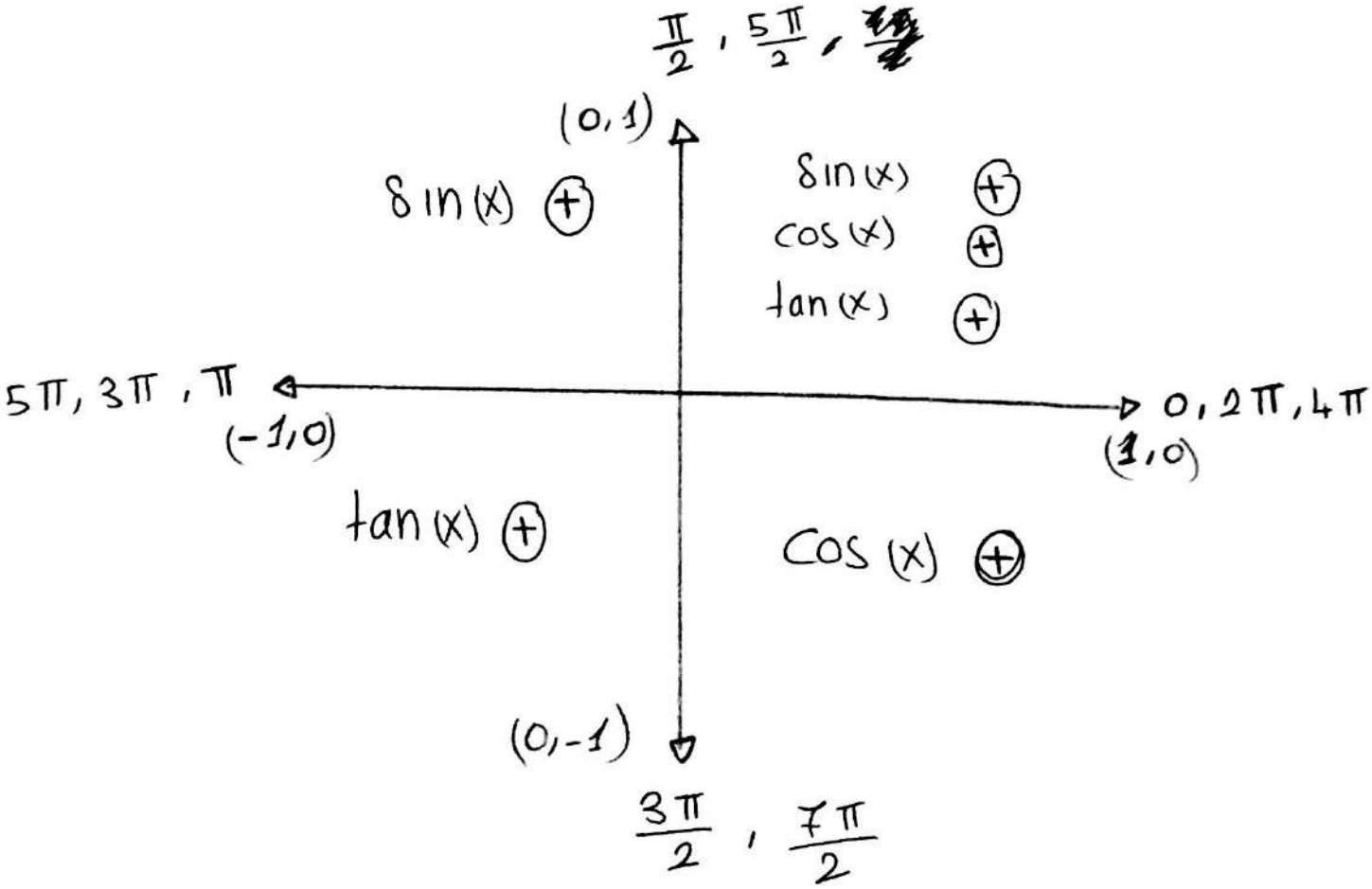
Scanned by CamScanner

*





بدل أن تحفظ الزوايا المشهورة هذان المثلثان للساعدوا على معرفة جميع الإحداثيات المثلثية للزوايا المشهورة .



Scanned by CamScanner

$\sin(x) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	$\csc(x) = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$
$\cos(x) = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$	$\sec(x) = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$
$\tan(x) = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$	$\cot(x) = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

* طريقة التحويل من نظام الدرجات إلى نظام الراديان.

$$120 * \boxed{\frac{\pi}{180}} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi}{3} * \boxed{\frac{180}{\pi}} = 120$$

* من الدرجات إلى الراديان إضرب بـ $\frac{\pi}{180}$

* من الراديان إلى الدرجات إضرب بـ $\frac{180}{\pi}$

Scanned by CamScanner

لمعرفة الزاوية الموجبة ⟸

في الربع الأول ← نبقى كما هي

في الربع الثاني ← $180 - \theta$

في الربع الثالث ← $\theta - \pi$

في الربع الرابع ← $2\pi - \theta$

Example 13 Find ?

① $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ ③ $\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

② $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ④ $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Solution ⟹

① $\frac{3\pi}{4} * \frac{180}{\pi} = 135$ ربع ثاني

$180 - 135 = 45$

$\sin(45) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Scanned by CamScanner

② $\frac{\pi}{6} * \frac{180}{\pi} = 30$ ربع اول

$\cos(30) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

③ $\frac{5\pi}{6} * \frac{180}{\pi} = 300$ ربع رابع

$360 - 300 = 60$

$\tan(60) = \sqrt{3}$ ربع رابع

④ $\frac{3\pi}{2} * \frac{180}{\pi} = 270$

$\sin(270) = -1$

Example 14 Find the domain ?

① $f(x) = \sin(\sqrt{x+1})$

② $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$

Solution ⇒

① $[-1, \infty)$ $x+1 \geq 0$, $x \geq -1$

② $x = 0$ $R - \{0\}$

Scanned by CamScanner

Example 15 Find the domain ?

① $f(x) = \dfrac{4}{1 + \cos(3x)}$

② $f(x) = \sqrt{1 - \cos(x)}$

Solution ⇒

① $\cos(3x) + 1 = 0$

$\cos(3x) = -1$

لأن $\cos(3x) = -1$ ∴
$\theta = \frac{3\pi}{2}$ عند

$\dfrac{3x}{3} = \dfrac{\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}}{3}$

$x = \frac{3\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \ldots$

$R - \left\{ \frac{3\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \ldots \right\}$

② $1 - \cos(x) \geq 0$

$1 \geq \cos(x)$

$\cos(x) \leq 1$ ← وأيضاً $\cos(x) \leq 1$

Domain = R

Scanned by CamScanner

* Exponential Function "الإقتران الأسي"

⊛ معلومات وخصائص عن الأسس ⇐

* $5^{3} = 5 * 5 * 5$

* $5^{-3} = \frac{1}{5^{3}}$

* $5^{0} = 1$

* $5^{3} * 5^{4} = 5^{3+4} = 5^{7}$ الأسس عند الضرب تجمع

* $\frac{5^{7}}{5^{3}} = 5^{7-3} = 5^{4}$ الأسس عند القسمة تطرح

* $(5^{2})^{3} = 5^{2*3} = 5^{6}$

* $\sqrt[4]{5^{3}} = 5^{\frac{3}{4}}$

* $\sqrt{5^{2}} = 5^{\frac{2}{2}}$

$f(x) = b^{x}$ ← المتغير

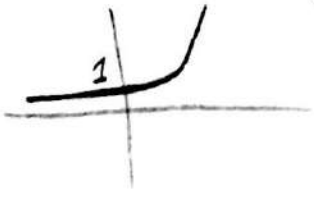
لـ عدد

$b \neq 1$

$b > 0$

رسمة الإقتران $f(x) = b^{x}$

شرط $b > 1$



شرط $0 < b < 1$

Scanned by CamScanner

⊛ في حال كان العدد b = 2.718 فإننا في هذه الحالة نكون في حالة خاصة

The natural exponential function سوف نتكلم في درس

⊛ Logarithmic function "اللوغاريتمي" الاقتران

$f(x) = \log_b x$ ⟵ Log ما داخل

Log أساس

⊛ معلومات وخصائص عن اللوغاريتمات ⟸

⊛ $\log_b ac = \log_b a + \log_b c$

⊛ $\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c$

⊛ $\log_b a^r = r \log_b a$

⊛ $\log_b \frac{1}{c} = -\log_b c$

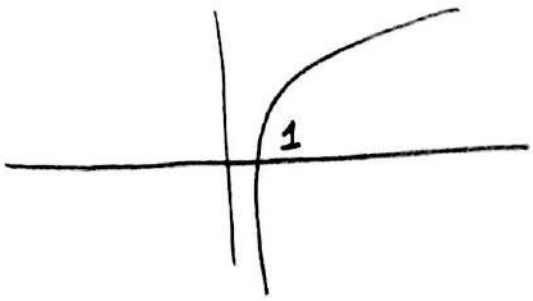
⊛ $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$

⊛ $b^{\log_b x} = x$

Scanned by CamScanner

$f(x) = \log_b x \longrightarrow x > 0$

$b \neq 1$
$b > 0$



* إذا لم يُوضع أساس Log فسيكون 10
* إذا كان أساس Log عدد يساوي 2.718 فإنه يُسمى Ln وأساسه e وقد يُكتب الأساس .

* قواعد اللوغاريتمات نفسها قواعد Ln

Example 16 Find the domain ?

① $f(x) = 5^{\frac{1}{x}}$

② $f(x) = \left((5)^{2}\right)^{\sqrt{x}}$

③ $f(x) = e^{\sqrt{x-3}}$

Scanned by CamScanner

Solution ⇒ في هذا السؤال نبحث للمتغير x

① $x = 0$

$\boxed{R - \{0\}}$

② $x \geq 0$

$\boxed{[0, \infty)}$

③ $x - 3 \geq 0$

$x \geq 3$

$\boxed{[3, \infty)}$

Example 17 Find the value of x ?

① $64 = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

② $9^x = 81$

Solution ⇒

① $4^3 = 4^{-x}$

$\boxed{x = -3}$

② $9^x = 9^2$

$\boxed{x = 2}$

Scanned by CamScanner

Example 18 Find the domain ?

① $f(x) = \ln(x)$

② $f(x) = \log(x-4)$

③ $f(x) = \frac{1}{\ln(x-3)}$

④ $f(x) = \log_x 8$

Solution ⇒

① $x > 0$

$(0, \infty)$

② $x - 4 > 0$

$(4, \infty)$

③ $x - 3 > 0$

$(3, \infty) - \{4\}$

$\ln 1 = 0$

لا يجوز أن يكون صفر في المقام

④ $x \neq 1$

$x > 0$

$(0, \infty) - \{1\}$

Scanned by CamScanner

Example 19 Find the value of x ?

① $3e^{4x} = 9$

② $\text{Log}\sqrt[3]{x} = 3$

③ $\text{Log}\frac{x}{3} = 6$

④ $\underset{x}{\text{Log}}(6x-8) = 2$

Solution ⟹

① $e^{4x} = \frac{9}{3}$

$\text{Ln}\, e^{4x} = \text{Ln}\, 3$

$4x = \text{Ln}3$

$\boxed{x = \frac{\text{Ln}3}{4}}$

② $\text{Log}\, x^{\frac{1}{3}} = 3$

$\frac{1}{3}\text{Log}\, x = 3$

$\text{Log}\, x = 9$

$\boxed{x = 10^{9}}$

③ $\text{Log}(x) - \text{Log}(3) = 6$

$\text{Log}\, x = 6 + \text{Log}\, 3$

$x = 10^{6} * 10^{\text{Log}3}$

$\boxed{x = 3 * 10^{6}}$

④ $x^{2} = 6x - 8$

$x^{2} - 6x + 8 = 0$

$(x-4)(x-2) = 0$

$\boxed{x = 4}$ $\boxed{x = 2}$

Scanned by CamScanner

* Inverse trigonometric function

	Domain	Range	odd/Even
$\sin^{-1}(x)$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	odd
$\cos^{-1}(x)$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	not odd not even
$\tan^{-1}(x)$	R	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	odd

	Domain	Range	odd/even
$\sec^{-1}(x)$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$[0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$	not odd not even
$\csc^{-1}(x)$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$(0, \frac{\pi}{2}] \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}]$	odd
$\cot^{-1}(x)$	R	$(0, \pi)$	not odd not even

Scanned by CamScanner

Example 20 Find ?

① $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

② $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

③ $\tan^{-1}(1)$

④ $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

⑤ $\sin^{-1}(-1)$

⑥ $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Solution ⟹

① ما هي الزاوية التي $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جيبها sin

لكي تجيب على هذا النوع من الأسئلة

تطبق على جميع الأسئلة

$\frac{\pi}{4}$

② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{\pi}{3}$

⑤ $\frac{3\pi}{2}$ ⑥ $-\frac{\pi}{6}$

Scanned by CamScanner

Example 21 find the domain ?

① & $f(x) = \sin^{-1}(5x)$

② $f(x) = \cos^{-1}(\sqrt{x-3})$

③ $f(x) = \sin^{-1}(1-3x)$

Solution ⟹

① $\frac{-1}{5} \leq \frac{5x}{5} \leq \frac{1}{5}$

$\left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$

② $-1 \leq \sqrt{x-3} \leq 1$

$0 \leq x-3 \leq 1$ هنا قمنا بتربيع الطرفين

$3 \leq x \leq 4$

$[3,4]$

Scanned by CamScanner

③ $-1 \leq 1-3x \leq 1$

$-2 \leq -3x \leq 0$

$\frac{2}{3} \geq x \geq 0$

$\boxed{[0, \frac{2}{3}]}$

ملاحظة مهمة ⇐ عند القسمة أو الضرب بـ سالب نعكس إشارة المتباينة

نوع آخر في المسئلة "مهم جداً" ⟸

خطوات الحل :-

① إذهب للزاوية θ وفي حال كانت في الربع الأول تبقى كما هي

الربع الثاني $\pi - \theta$

الربع الثالث $\theta - \pi$

الربع الرابع $2\pi - \theta$

② نجد قيمة ما داخل القوس مع الإنتباه للإشارة

③ نجد مقدار ما خارج القوس .

$\sin^{-1}(\sin\theta)$

$\cos^{-1}(\cos\theta)$

$\tan^{-1}(\tan\theta)$

Scanned by CamScanner

Example 22 Find ?

① $\sin^{-1}\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

② $\sin^{-1}\left(\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

Solution ⟹

①

$$\frac{7 * 180}{6} = 210$$

← ربع ثالث

$$210 - 180 = 30$$

← الزاوية المرجعية

$$\sin(30) = \frac{1}{2}$$

← قيمة ما داخل القوس

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

← قيمة ما خارج القوس

① نحدد الزاوية في أي ربع

② نحدد الزاوية المرجعية

③ نجد قيمة ما داخل القوس

④ نجد قيمة ما خارج القوس

⑤ الإشارة

إشارة sin في الربع الثالث ⊖

$$\boxed{-\frac{\pi}{6}}$$

Scanned by CamScanner

② $\frac{5 * 180}{3} = 300$

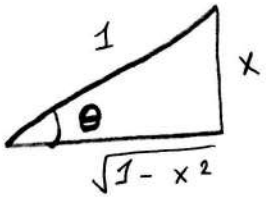
$360 - 300 = 60$

$\sin(60) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ $\boxed{-\frac{\pi}{3}}$

---

* في حالة كانت $Trig^{-1}$ في الداخل و Trig في الخارج نحل السؤال باستخدام المثلث .



① نرسم مثلث ونرى ما هو المقتران الداخلي على فرض $\sin^{-1}\left(\frac{x}{1}\right)$ لـ $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

② نجد طول الضلع الثالث عن طريق فيثاغورس

③ ثم نجد المقتران الخارجي

Scanned by CamScanner

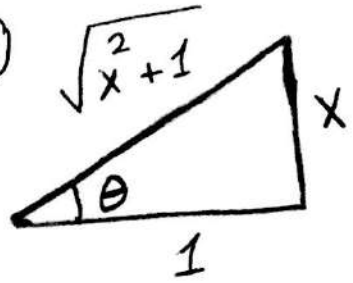
Example 23 Find ?

① $\cos(\tan^{-1}(x))$

② $\sec(\cos^{-1}(x))$

Solution ⟹

①



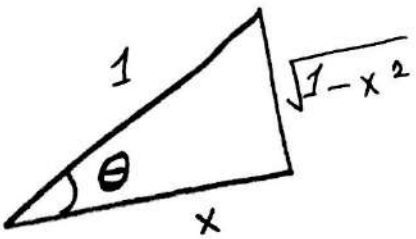
$\tan^{-1}(\frac{x}{1})$ الزاوية الداخلية تحتوي

$\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

نجد $\cos(\theta)$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

②



نجد $\sec(\theta)$

$$\frac{1}{x}$$

Scanned by CamScanner

محمد السفاريني

Scanned by CamScanner

* Limits ⟹ "النهايات"

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ ← عدد

IF $\lim_{x \to \bar{a}} f(x) = \lim_{x \to \dot{a}} f(x) = L$

$\lim_{x \to a} f(x)$ exist ← موجودة

IF $\lim_{x \to \bar{a}} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$

$\lim_{x \to a} f(x)$ does not exist

* ملاحظة ⟸

① في موضوع النهايات علينا دراسة $f(x)$ ثم الحكم

② عندما نقول أن النهاية تقترب من 2 فهي لا تساوي 2 تماماً بل إما أن تكون 1.9998 و إما 2.00001 عندئذ يوجد نهاية من اليمين و اليسار .

Scanned by CamScanner

Example 1 Find ?

① $\lim_{x \to 2} (x^3 + 1)$

② $\lim_{x \to 0} (x^2 + x^5 - 3)$

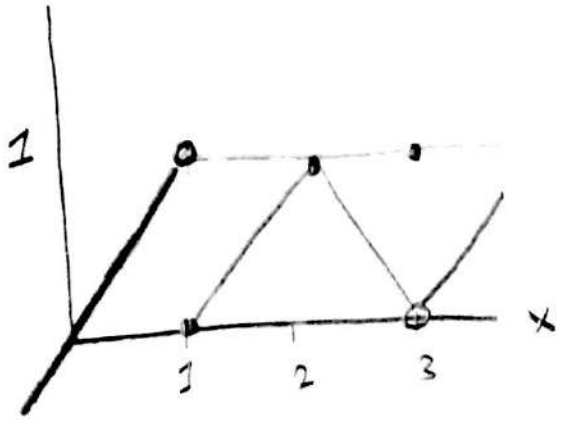
Solution ⇒ عوض بدل كل x في الاقتران الرقم المعطى .

① $(2)^3 + 1 =$ **10**

② $(0)^2 + (0)^5 - 3 =$ **-3**

Example 2 Find ?

$y = g(x)$



① $\lim_{x \to 2} g(x)$

② $\lim_{x \to 3} g(x)$

③ $g(3)$

* الدالة $f(x)$ يجب أن تكون مغلقة

Solution ⇒

① **1**

② **0**

③ **1**

2

Scanned by CamScanner

* Limit Laws ⟹

IF L, M, c and K real numbers and

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ $\quad$ $\lim_{x \to c} g(x) = M$

① $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M$

② $\lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = L - M$

يعني فرضاً

③ $\lim_{x \to c} (K \cdot f(x)) = K \cdot L$

④ $\lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

⑤ $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ $\quad$ $M \neq 0$

⑥ $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = L^n$

⑦ $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{\frac{1}{n}}$ $\quad$ $L > 0$

Scanned by CamScanner

Example 3

IF $\lim_{x \to c} K = K$, $\lim_{x \to c} x = c$

Find ?

① $\lim_{x \to c} \dfrac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5}$

* نوجد الحل بواسطة نظريات Lim

② $\lim_{x \to 2} \sqrt{4x^2 - 3}$

Solution ⟹

① $$\frac{\lim_{x \to c}(x^4) + \lim_{x \to c}(x^2) - \lim_{x \to c}(1)}{\lim_{x \to c}(x^2) + \lim_{x \to c}(5)} = \frac{c^4 + c^2 - 1}{c^2 + 5}$$

② $$\lim_{x \to 2} (4x^2 - 3)^{\frac{1}{2}} = \left[\lim_{x \to 2} 4x^2 - 3\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(13)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{13}$$

Scanned by CamScanner

⊛

دائماً في سؤال النهايات عوض القيمة المعطاة

وعن خلال الجواب نحكم ⇐

⇐ إذا كان الجواب عدد ← حالة 1

Example 4 Find ?

① $\lim_{x \to 11} \frac{\sqrt[3]{x-3}}{x-1}$

② $\lim_{x \to 6} (x-4)(x-3)(x-5)$

③ $\lim_{x \to 0} \frac{3}{\sqrt{3x+1}+1}$

Solution ⇒

① $\lim_{x \to 11} \frac{\sqrt[3]{11-3}}{11-1} = \frac{2}{10} = \boxed{\frac{1}{5}}$

② $\lim_{x \to 6} (6-4)(6-3)(6-5) = 2*3*1 = \boxed{6}$

Scanned by CamScanner

③ $\lim_{x \to 0} \dfrac{3}{\sqrt{1}+1} = \boxed{\dfrac{3}{2}}$

∴ نستنتج بأن إذا كان الجواب عدد فلا توجد مشكلة والجواب مقبول .

حالة 2 ⟸ إذا كان الجواب $\frac{0}{0}$

معنى هذا

فيحل السؤال إما

① التبسيط ② الفرض ③ توحيد المقام

④ الضرب بالمرافق

Example 5 Find ?

① $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}$

② $\lim_{x \to 2} \left[\dfrac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}}{x - 2} \right]$

③ $\lim_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

④ $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{x - 2}$

Scanned by CamScanner

Solution ⟹

① $\lim_{x \to 4} \frac{16 - 2x + 8}{4 - 4} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(x-2)}{(x-4)} = \boxed{2}$

---

② $\lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}}{2 - 2} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x \to 2} \frac{3 - x - 1}{3(x+1)} * \frac{1}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{-(2-x)}{3(x+1)(x-2)}$

$\boxed{-\frac{1}{9}}$

---

③ $\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{9} - 3}{9 - 9} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} * \left(\frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}\right) =$

$\lim_{x \to 9} \frac{(x-9)}{(x-9)(\sqrt{x} + 3)} = \boxed{\frac{1}{6}}$

Scanned by CamScanner

④ $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{8} - 2}{x - 2} = \frac{0}{0}$

خطوات الفرض ⇐

① افرض الجذر y

② اجعل x موضوع القانون

③ جد قيمة ذيل النهاية

$y = \sqrt[3]{x+6}$

$y^3 - 6 = x$

$\sqrt[3]{2+6} = \boxed{2}$ ← ذيل النهاية

$\lim_{y\to 2} \frac{y-2}{y^3-8} = \lim_{y\to 2} \frac{(y-2)}{(y-2)(y^2+2y+4)} = \boxed{\frac{1}{12}}$

الحالة 3

إذا كان الجواب $\frac{\text{عدد}}{0}$ ⇐

يجب أن نفحص الإشارات

إما أن يكون الجواب:

- ∞
- $-\infty$
- d.n.e

Example 6 Find ?

① $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x^2-9}$

② $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$

③ $\lim_{x\to 1} \frac{8}{x^2-2x+1}$

Scanned by CamScanner

Solution ⟹

① $\lim_{x \to 3} \frac{1}{0}$ نأخذ يمين ويسار 3

$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{0} = +\infty$ $\lim_{x \to 3^+} \neq \lim_{x \to 3^-}$

$\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{0} = -\infty$ d.n.e

② $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{0} = -\infty$

③ $\lim_{x \to 1} \frac{8}{(x-1)^2} = \frac{8}{0}$

$\lim_{x \to 1^+} \frac{8}{0} = +\infty$ $\lim_{x \to 1^+} = \lim_{x \to 1^-} = \infty$

$\lim_{x \to 1^-} \frac{8}{0} = +\infty$

Scanned by CamScanner

⊛ في حالة كان الإقتران متشعب والمطلوب هو إيجاد النهاية ⟸

⊛ النهاية عند نقطة عادية ← من عند القاعدة المقابلة

⊛ النهاية عند الطرف ← غير موجودة

⊛ النهاية عند نقطة تشعب ← النهاية من عند اليمين واليسار

Example 6 Find ?

① $\lim_{x \to 4} f(x)$

② $\lim_{x \to -3} f(x)$

③ $\lim_{x \to 0} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{x+2} & x > 0 \\ \sqrt{x+8} & x \leq 0 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Solution ⇒

① $\frac{12}{6} = \boxed{2}$ النقطة 4 عادية

② $\boxed{5}$ النقطة 3- عادية

③ النقطة 0 تشعب

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3x}{x+2} = 0$$

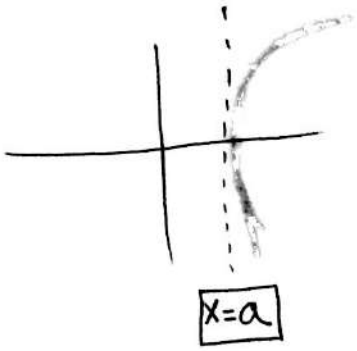
$$\lim_{x \to 0^-} \sqrt{x+8} = \sqrt{8}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \neq \lim_{x \to 0^-}$$ d.n.e

11

Scanned by CamScanner

⊛ Vertical asymptote "الخط التقارب الرأسي"



خطوات الحل :-

① أخرج أصفار المقام والبسط

② وكتبها نهاية للاقتران $f(x)$

③ إذا كان الجواب $+\infty$ أو $-\infty$ أو d.n.e يكون خط تقارب رأسي

Example 7 Find the vertical asymptote ?

① $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$

Solution ⟹

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x-3)(x-2) = 0$ ← أصفار المقام

$x-3$ ← $x=3$

$x-2$ ← $x=2$

$x - 2 = 0$ ← أصفار البسط

$x = 2$

Scanned by CamScanner

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)}{(x^2-5x+6)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \boxed{-1}$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \frac{1}{0} = -\infty$$

$\boxed{x = 3}$ vertical asymptote

---

* **Limits at infinity** ⟹ "نهايات في اللانهاية"

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Scanned by CamScanner

محمد السفاريني

Scanned by CamScanner

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)}{(x^2-5x+6)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \boxed{-1}$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \frac{1}{0} = -\infty$$

$\boxed{x = 3}$ vertical asymptote

---

* Limits at infinity ⟹ نهايات في اللانهاية

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Scanned by CamScanner

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1}(x) = -\frac{\pi}{2}$$

$-\infty = \frac{\text{عدد}-}{\text{صفر}}$ $\quad \infty = \frac{\text{عدد}}{0}$

$0 = \frac{\text{عدد}}{\infty}$ $\quad \infty = \frac{\infty}{\text{عدد}}$

⊛ قواعد مهمة

$$\lim_{x \to \infty, -\infty} a = a$$

$$\lim_{x \to \infty} x^n = \infty \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n \begin{cases} \to -\infty & n = \text{odd} \\ \to \infty & n \text{ even} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \infty} cx^n + c1\,x = \lim_{x \to \infty} c\,x^n$$ مهمة

Scanned by CamScanner

Example 8 Find ?

① $\lim_{x \to \infty} (3x^2 - 6x + 4x^5)$

② $\lim_{x \to \infty} (5)$

③ $\lim_{x \to \infty} (4x^8)$

④ $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x^5}\right)$

Solution ⇒

① $\lim_{x \to \infty} 4x^5 = \infty$

② 5 ③ ∞

④ 0

Scanned by CamScanner

قواعد مهمة جداً ⟸

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}}$$

① درجة المبسط < درجة المقام

$\pm\infty$

② درجة المبسط > درجة المقام

صفر

③ درجة المبسط = درجة المقام

$$\frac{\text{معامل أكبر أس}}{\text{معامل أكبر أس}}$$

Example 9 Find ?

① $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^4 + 8x^8}{3x^6 + 2x}$

② $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 + 5}{5x^5}$

③ $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 + 2x^2}{4x^3 + 7}$

Scanned by CamScanner

Solution ⟹

① ∞ ② 0 ③ $\frac{3}{4}$

Example 10 Find ?

① $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 + x}{1 - x^2 - 5x^3}$

② $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x} - x \right)$

③ $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$

④ $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{3x} - e^{-x}}{e^{2x} - e^{-3x}}$

Scanned by CamScanner

Solution ⟹

① $\boxed{-\frac{3}{5}}$ على القاعدة

② اضرب بالمرافق

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-3x} - x \quad * \left(\frac{\sqrt{x^2-3x}+x}{\sqrt{x^2-3x}+x}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x-x^2}{\sqrt{x^2-3x}+x} = -\frac{3x}{2x} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

③ $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x|}{x} = \boxed{1}$

④ $y = e^x$ افرض

$x \to \infty$
$y \to \infty$

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\frac{y^3}{1} - \frac{1}{y}}{\frac{y^2}{1} - \frac{1}{y^3}}$$

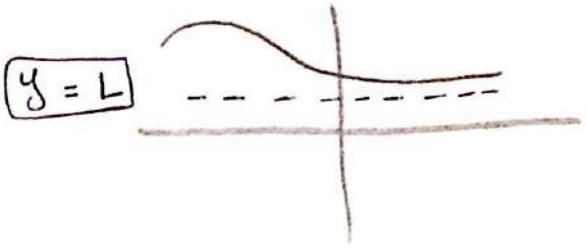
$$\lim_{y\to\infty} \frac{y^4-1}{y} * \frac{y^3}{y^5-1} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^6-y^2}{y^5-1}$$

$$\lim_{y\to\infty} y = \boxed{\infty}$$

18

Scanned by CamScanner

⊛ Horizontal asymptote ⟹ "الخط المتقارب الأفقي"



خطوات الحل :-

① نكتب نهاية $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

② إذا كان الجواب عدد فيعتبر خط تقارب أفقي

Example 11 find the horizontal asymptote ?

① $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+2}}{x+3}$

② $f(x) = \frac{5-3x^2}{1-x^2}$

Solution ⟹

① $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^2+2}}{x+3}$

$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^2}}{x}$

$\lim_{x \to \infty} \frac{2|x|}{x}$ = 2

$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2}}{x+3}$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{2|x|}{x}$

= -2

$y = 2$

$y = -2$

Scanned by CamScanner

② $\lim_{x \to \infty} \frac{5 - 3x^2}{1 - x^2}$

$\lim_{x \to \infty} \frac{-3x^2}{-x^2} = \boxed{3}$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{5 - 3x^2}{1 - x^2}$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{-3x^2}{-x^2}$

$= \boxed{3}$

$\boxed{y = 3}$

---

* Continuity ⟹ الإتصال

الإتصال ✳ ← at number عند نقطة معينة
الإتصال ✳ ← at interval عند فترة معينة

✳ شروط الإتصال عند نقطة معينة ⟸

① $f(c) =$ يوجد قيمة

② $\lim_{x \to c} f(x) =$ معرف

③ $f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$

Scanned by CamScanner

Example 12 IS $f(x)$ cont at $x = 14$??

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x-5} - 3}{x - 14} & x \neq 14 \\ \dfrac{1}{6} & x = 14 \end{cases}$$

$$f(14) = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \to 14} \frac{\sqrt{x-5} - 3}{x - 14} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 14} \frac{\sqrt{x-5} - 3}{x - 14} * \frac{\sqrt{x-5} + 3}{\sqrt{x-5} + 3}$$

$$\lim_{x \to 14} \frac{(x - 5 - 9)}{(x-14)(\sqrt{x-5} + 3)} = \frac{1}{6}$$

$$f(14) = \lim_{x \to 14} f(x) = f(x) \text{ cont at } x = 14$$

Scanned by CamScanner

* عندما يطلب منك أين الاقتران متصل أوجد المجال .

* عندما يطلب منك أين نقاط عدم الاتصال أوجد المجال ثم إلغي المجال من الجواب .

Example 13 Where $f(x)$ is cont ?

① $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x-3}}$

② $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)+3}$

Solution :-

① بمعنى آخر المطلوب إيجاد المجال

$\ln(x) \Rightarrow (0, \infty)$

$\sqrt{x-3} \Rightarrow (3, \infty)$

$\boxed{(3, \infty)}$

② $\cos(x) \Rightarrow R$

$\sin(x) \neq -3$

$\boxed{R}$

Scanned by CamScanner

Example 14 Where $f(x)$ is discont ?

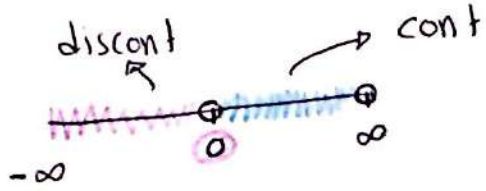
① $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$

② $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x-5}}$

Solution ⇒

① $\ln(x) \rightarrow (0, \infty)$

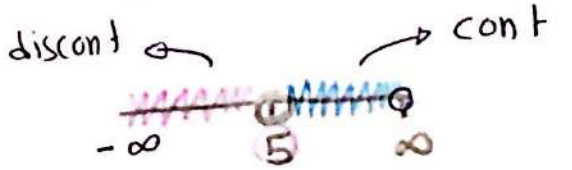
$(-\infty, 0]$



② $\sqrt{x-5} \rightarrow (5, \infty)$

$(-\infty, 5]$

⊛ للتوضيح ⇐



شروط الاتصال على الفترة (a, b) ⇐

① $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

② $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

③ وجب نهاية للنقاط الأخرى غير الأطراف

Scanned by CamScanner

Example 15 Is $f(x)$ is cont on $[-2,3]$?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & -2 \le x < 0 \\ \sqrt{x+1} & 0 \le x < 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$$

$f(-2) = 2$ $\quad \lim_{x \to -2^+} (x^2 + x) = 2$ — cont at $x = -2$

$f(3) = 6$ $\quad \lim_{x \to 3^-} \sqrt{x+1} = 2$ — discont at $x = 3$

$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x+1} = 1$ — discont at $x = 0$

$\lim_{x \to 0^-} x^2 + x = 0$

$f(x)$ cont $[-2, 3) - \{0\}$

Scanned by CamScanner

قاعدة

(*)

$f(x)$, $g(x)$ cont at $x = c$

then $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ $g(x) \neq 0$

is cont at $x = c$.

Example 16 $f(x) = x^2 + 1$

$$g(x) = \begin{cases} x - 1 & x < 0 \\ x^2 + x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Is $f(x) - g(x)$ cont at $x = 0$??

$f(x)$ cont at $x = 0$ حسب المعطيات

$g(x) \Rightarrow$

$g(0) = -1$

$\lim_{x \to 0^+} x^2 + x - 1 = -1$ $\lim_{x \to 0^-} x - 1 = -1$

$g(0) = \lim_{x \to 0} g(x) = -1$

$f(x) - g(x)$ cont at $x = 0$

Scanned by CamScanner

Derivatives
المشتقات

* رمز المشتقة ⇐ $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, y'

قواعد المشتقة ⇐ مهم جدا!

① مشتقة الثابت (العدد) تساوي صفر

$f(x) = \pi$ $\quad f'(x) = 0$

$f(x) = 10^4$ $\quad f'(x) = 0$

---

②

$f(x) = x^r$ $\quad f'(x) = r\, x^{r-1}$

$f(x) = x^3$ $\quad f'(x) = 3\, x^{3-1}$

$f(x) = x^{-5}$ $\quad f'(x) = -5\, x^{-5-1}$

---

③

$f(x) = c\, g(x)$ $\quad f'(x) = c\, g'(x)$

الثابت لا يؤثر على المشتقة

$f(x) = 3x^5$ $\quad f'(x) = 3 * 5 * x^4$

$f(x) = -8x^{-3}$ $\quad f'(x) = -8 * -3 * x^{-4}$

Scanned by CamScanner

④

$(f(x) \pm g(x))'$ ← رمز المشتقة $= f'(x) + g'(x)$

نشتق كل واحد لحده

$f(x) = 3x^3 + 2x^2$ $\quad f'(x) = 3*3*x^2$

$f(x) = 6x^{-2} + 4x^3$ $\quad f'(x) = 6*-2*x^{-3} + 4*3*x^2$

---

⑤

$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)\,g(x) + g'(x)\,f(x)$

إشارة الضرب

$f(x) = (x+1)(x+2)$ $\quad f'(x) = (x+1)*1 + (x+2)*1$

$f(x) = (2x+3)(x^2+1)$ $\quad f'(x) = (2x+3)(2x) + (x^2+1)2$

---

⑥

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - g'(x)\,f(x)}{(g(x))^2}$

$f(x) = \frac{2x+1}{x^2}$ $\quad f'(x) = \frac{2*(x^2) - 2x(2x+1)}{(x^2)^2}$

$f(x) = \frac{x+5}{3x+4}$ $\quad f'(x) = \frac{1*(3x+4) - 3*1}{(3x+4)^2}$

Scanned by CamScanner

(7)

$$\left(\frac{c}{f(x)}\right)' = \frac{-c \cdot f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$f(x) = \frac{5}{x^2+1} \qquad f'(x) = \frac{-5 * 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(x) = \frac{-1 * 1}{x^2}$$

---

(8)

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\sec^2(x)$
$\cot(x)$	$-\csc^2(x)$
$\sec(x)$	$\sec(x)\tan(x)$
$\csc(x)$	$-\csc(x)\cot(x)$

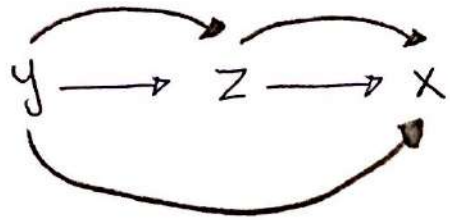
بدون

$$f(x) = \sin(x) + \tan(x) \qquad f'(x) = \cos(x) + \sec^2(x)$$

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\sec(x)} \qquad f'(x) = \frac{-\sin(x)\sec(x) - \sec(x)\tan(x)\cos(x)}{(\sec(x))^2}$$

Scanned by CamScanner

* Chain rules قاعدة السلسلة



$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Example 17 find $\frac{dy}{dx}$?

$y = \tan(z)$

$z = \sin(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(z) \cdot \cos(x) = \boxed{\sec^2(\sin(x)) \cdot \cos(x)}$$

يجب أن يكون الناتج بدلالة x الوحيد

Scanned by CamScanner

Example 18 Find $\frac{dy}{dz}$?

When $x = 3$

$$z = \frac{x^2}{3}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$3 = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{3}\, 2x$$

$$\frac{9}{2x} = \frac{dy}{dz}$$

$$\boxed{\frac{9}{6} = \frac{dy}{dz}}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

اشتق $f(x)$ ثم عوض $g(x)$

Example 19 Find $(f \circ g)'(x)$?

If $f(x) = x^4 + 5$

$g(x) = x^2$

Scanned by CamScanner

Solution ⟹

$g'(x) = 2x$

$f'(x) = 4x^3$

$f'(g(x)) = 4(2x)^3$

$(f \circ g)'(x) = 32x^3 \cdot 2x$

$\boxed{64x^4}$

Example 20 If $(f \circ g)'(4) = 8$

$g'(4) = 16$ find $f'(g(4))$?

$g(4)$

$(f \circ g)'(4) = f'(g(4)) \cdot g'(4)$

$\boxed{\frac{8}{16} = f'(g(4))}$

Scanned by CamScanner

(11)

$$(\text{trig}(f(x)))' = f'(x) \cdot \text{trig}'(f(x))$$

↳ اقتران مثلثي

$f(x) = \cos(x^3 + x)$

~~$f'(x) = (3x^2+1)(\sin x)$~~

$f'(x) = (3x^2+1)(-\sin(x^3+x))$

$f(x) = \sec(\sqrt{x})$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sec(\sqrt{x}) \tan(\sqrt{x})$

---

(12)

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{f(x)}\right) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

↳ فقط للجذر التربيعي

$f(x) = \sqrt{x^3+1}$

$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$

$f(x) = \sqrt{\sin(x)}$

$f'(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$

Scanned by CamScanner

$$\frac{d}{dx}\left((f(x))^n \right) = n\,(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

$f(x) = (x^2+3)^2$ $\quad f'(x) = 2(x^2+3)\cdot 2x$

$f(x) = \tan^3(x)$ $\quad f'(x) = 3\tan^2(x)\cdot \sec^2(x)$

---

* Implicit diff "الاشتقاق الضمني"

* عندما لا نستطيع أن نجعل y موضوع القانون تكون حالة الاشتقاق ضمني.

نشتق x كما هو الاعتياد حتى y بعد أن نشتقها نضع y' ثم نجعل y' موضوع القانون.

Example 21 Find $\frac{dy}{dx}$?

$$x + \sin(xy) = y$$

$$1 + \cos(xy)\cdot(xy' + y) = y'$$

$$\frac{-1 - y\cos(xy)}{x\cos(xy) - 1} = y'$$

Scanned by CamScanner

Example 22 Find $\frac{dy}{dx}$ when $x=0$?

$$xy^2 + y^3 - x^2 = x + 8$$

$$x \cdot 2yy' + y^2 + 3y^2y' - 2x = 1$$

* لكي نجد قيمة y نعوض x في المعادلة الأصلية

$$0 + y^3 - 0 = 0 + 8$$

$$y^3 = 8 \quad \boxed{y = 2}$$

$$4 + 12y' = 1$$

$$3 = -12y'$$

$$\boxed{y' = -\frac{1}{4}}$$

---

(15)

$$f(x) = \log_a(g(x)) \qquad f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)\ln(a)}$$

$$f(x) = \ln(g(x)) \qquad f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$f(x) = \ln(x^3) \qquad f'(x) = \frac{3x^2}{x^3}$$

$$f(x) = \frac{1}{\log(x^2)} \qquad f'(x) = \frac{-1 * \frac{2x}{x^2}}{(\log(x^2))^2}$$

Scanned by CamScanner

(16)

$f(x) = a^{g(x)}$ ← عدد

$f'(x) = g'(x) \cdot a^{g(x)} \cdot \ln(a)$

$f(x) = e^{g(x)}$

$f'(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$

$f(x) = 5^{\frac{1}{x}}$

$f'(x) = 5^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}$

$f(x) = e^{7x}$

$f'(x) = e^{7x} \cdot 7$

(17)

$f(x)$	$f'(x)$	
$\sin^{-1}(g(x))$	$\frac{g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}$	] نفس بعض الاختلاف في الاشارة
$\cos^{-1}(g(x))$	$\frac{\ominus g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}$	
$\tan^{-1}(g(x))$	$\frac{g'(x)}{1+(g(x))^2}$	] نفس بعض الاختلاف في الاشارة
$\cot^{-1}(g(x))$	$\frac{\ominus g'(x)}{1+(g(x))^2}$	
$\sec^{-1}(g(x))$	$\frac{g'(x)}{\lvert g(x)\rvert\sqrt{(g(x))^2-1}}$	] نفس بعض الاختلاف في الاشارة
$\csc^{-1}(g(x))$	$\frac{\ominus g'(x)}{\lvert g(x)\rvert\sqrt{(g(x))^2-1}}$	

Scanned by CamScanner

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Example 23 Find $\left(f^{-1}\right)'(3)$?

$$f(x) = x^4 + x + 3$$

$$\left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))}$$

نجدها عن طريق التجريب

$$f'(x) = 4x^3 + 1$$

$$f'(0) = 1$$

$$f(0) = 3$$

$$= \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

---

* Higher Derivatives ⟹ "المشتقات العليا"

هو أن تشتق الاقترانات التي من ن

$$f(x) = x^5$$

$$f'(x) = 5x^4$$

$$f''(x) = 20x^3$$

$$f'''(x) = 60x^2$$

$$f^{(4)}(x) = 120x$$

Scanned by CamScanner

ملاحظة ⇐ والمثى

⊛ عندما نحول الى المشتقة الرابعة نضع الرقم بين قوسين .

Scanned by CamScanner

محمد السفاريني

Scanned by CamScanner

⊛ Differentiability "قابلية للاشتقاق"

يكون الاقتران قابل للاشتقاق عند ما يكون ⇐
عند نقطة a

① عندما يكون متصل عند النقطة a

ملاحظة ⇐

⊛ الاقتران امتصل ليس دائما اقتران قابل للاشتقاق
ولكن إذا كان قابل للاشتقاق فهو متصل

Example 24 Is $f(x)$ diff at $x=2$?

$$f(x) = \begin{cases} 7x & x < 2 \\ 2x + 10 & x \geq 2 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

أولا نفحص الاتصال ⟸

$f(2) = 14$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 14$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 14$

⟶ متصل عند $x = 2$

ثانيا نفحص الاشتقاق ⟸

$$f'(x) = \begin{cases} 7 & x < 2 \\ 2 & x > 2 \end{cases}$$

$f'_+(2) = 2$

$f'_-(2) = 7$

⟶ غير قابل للاشتقاق عند $x = 2$

Scanned by CamScanner

Example 25 Is $f(x)$ diff at $x = 3$?

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 3 \\ x + 5 & x < 3 \end{cases}$$

أولاً نفحص الاتصال ⇐

$f(3) = 27$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 27$ $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 8$

غير متصل مباشرة غير قابل للاشتقاق

Example 26 If $f(x) = \begin{cases} 4a + 4 & x > 1 \\ x^2 + 3 & x \leq 1 \end{cases}$

Find the value of a IF $f(x)$

diff at $x = 1$?

Scanned by CamScanner

Diff at $x=1$ تكون معطيتي معلومة لازم

مباشرة بكتب

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

$$4a + 4 = 4$$

$$4a = 0 \qquad \boxed{a = 0}$$

Example 2 f If $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & x \geq 2 \\ bx^2 + 4 & x < 2 \end{cases}$

Find the value of a,b If f(x) diff at $x = 2$?

* نفس مبدأ حل مثال 26

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$$

$$4a + 2b + 1 = 4b + 4$$

$$\boxed{4a - 2b = 3} \longrightarrow (1)$$

Scanned by CamScanner

$$f'(2) \quad = \quad f'(2)$$
$$+ \qquad\qquad -$$

$$2ax + b = 2bx$$

$$4a + b = 4b \qquad \boxed{4a = 3b} \longrightarrow (2)$$

من خلال تعويض معادلة (2) في معادلة (1)

$$3b - 2b = 3$$

$$\boxed{b = 3}$$ ← عوض في معادلة (2)

$$\boxed{a = \frac{9}{4}}$$

---

* Equation of tangent line at $x = a$

خطوات الحل ⇐

① اشتق الاقتران المعطى ثم عوض النقطة a

② عوض النقطة a في الاقتران الأصلي

③ اكتب المعادلة على الصورة التالية

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$$

Scanned by CamScanner

Example 28 Find the equation of tangent line at $x = \frac{3\pi}{4}$?

$$f(x) = 3\cos(2x)$$

أول خطوة بالشتف $f(x)$ ثم عوض $\frac{3\pi}{4}$

$$f'(x) = -6\sin(2x)$$

$$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 6$$

ثاني خطوة عوض x في الاقتران الاساسي

$$= 3\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \boxed{0}$$

$$y - f(x) = f'(x)(x - x_0)$$

$$y - 0 = 6\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\boxed{y = 6x - \frac{9\pi}{2}}$$

Scanned by CamScanner

* ملاحظات هامة

⊛ لو طلب منك ← equation of Normal of tangent

نفس الحل بكل خطوة ④ تختلف

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)} (x - a)$$

⊛

IF $L1 \parallel L2 \Longrightarrow m1 = m2$ (موازي)

IF $L1 \perp L2 \Longrightarrow m1 * m2 = -1$ (ميل، عمودي)

Example 29 Find the equation of Normal of tangent at $x = 1$?

$$f(x) = x + x^2$$

$$f'(x) = 1 + 2x$$

$$f'(1) = 3 \longrightarrow$$ Normal اوجد

Scanned by CamScanner

عوض $x = 1$ في المعادلات الأصلي

$$f(1) = 2$$

$$y - f(1) = \frac{-1}{f'(1)} (x - a)$$

$$y - 2 = -\frac{1}{3} (x - 1)$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{3} x + \frac{7}{3}}$$

ملاحظات هامة

* لو طلب Slope of { Normal, tangent }

نجد المشتقة فقط

* لو طلب القيم x التي تكون عندها tangent line horizontal

$$f'(x) = 0$$

Scanned by CamScanner

* Hyperbolic Functions

من باب المعرفة فقط

Sin (x)
Cos (x) ⟶ تمثل بإحداثي نقطة على دائرة معادلتها

$$x^2 + y^2 = 1$$

أما في موضوعنا فإنها تعرف نقطة على منحنى القطع الزائد

$$x^2 - y^2 = 1$$

---

* $\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ حفظا

$$\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

Scanned by CamScanner

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}}$$

حفظ

$$\operatorname{Sech}(x) = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$\coth(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

Cosh (x)
Sech (x)
→ Even Fun

Sinh (x)
csch (x)
tanh (x)
coth (x)
→ odd Fun

للسيطرة

Scanned by CamScanner

* متطابقات يجب حفظها ⟸

$$\cosh(x) + \sinh(x) = e^{x}$$

$$\cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$1 - \tanh^2(x) = \operatorname{sech}^2(x)$$

$$\coth^2(x) - 1 = \operatorname{csch}^2(x)$$

$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$$

$$\cosh(2x) = \begin{cases} 2\sinh^2(x) + 1 \\ 2\cosh^2(x) - 1 \\ \cosh^2(x) + \sinh^2(x) \end{cases}$$

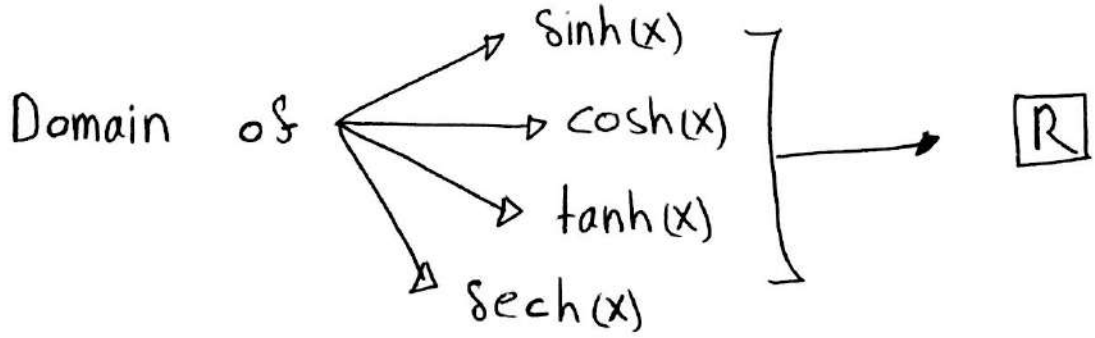
$$\sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x) - 1}{2}$$

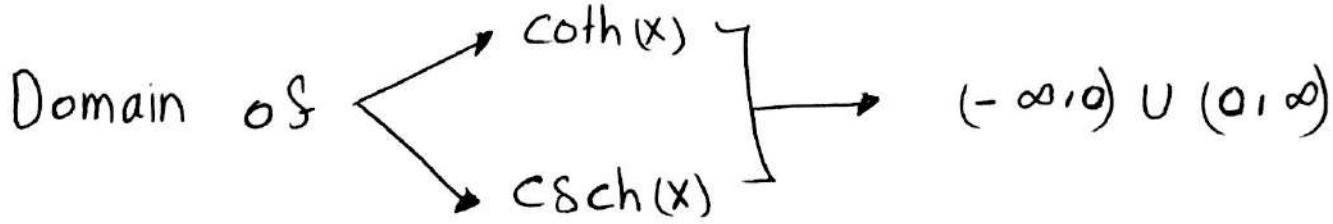
$$\cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x) + 1}{2}$$

Scanned by CamScanner

$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\operatorname{sech}^2(x)$
$\coth(x)$	$-\operatorname{csch}^2(x)$
$\operatorname{sech}(x)$	$-\operatorname{sech}(x)\tanh(x)$
$\operatorname{csch}(x)$	$-\operatorname{csch}(x)\coth(x)$

حفظ





Scanned by CamScanner

Example 30 Find ?

① $\cosh(\ln 3)$ ② $\operatorname{sech}(\ln 2)$

③ $\coth(2\ln 3)$

Solutions ⟹

① $$\frac{e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}}{2} = \frac{3 + 3^{-1}}{2} = \boxed{\frac{5}{3}}$$

② $$\frac{2}{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}} = \frac{2}{2 + 2^{-1}} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

③ $$\frac{e^{2\ln 3} + e^{-2\ln 3}}{e^{2\ln 3} - e^{-2\ln 3}} = \frac{3^2 + 3^{-2}}{3^2 - 3^{-2}} = \boxed{\frac{41}{40}}$$

Scanned by CamScanner

Example 31 IF $\cosh(x) = \frac{5}{3}$

and $x > 0$ Find $\tanh(x)$?

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\frac{25}{9} - \sinh^2(x) = 1$$

$$\frac{16}{9} = \sinh^2(x) \qquad \sinh(x) = \pm \frac{4}{3}$$

نأخذ القيمة الموجبة

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

Example 32 Find $f'(x)$?

① $f(x) = \cosh(\ln x)$

② $f(x) = \tanh\left(e^{2x} + 1\right)$

③ $f(x) = \frac{e}{\cosh(3x)}$

Scanned by CamScanner

Solutions ⇒

① $\frac{\sinh(\ln x)}{x}$

② $\operatorname{sech}^2(e^{2x}+1) \cdot e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}\operatorname{sech}^2(e^{2x}+1)$

③ $e^{\cosh(3x)} \cdot \sinh(3x) \cdot 3 = 3\sinh(3x)\, e^{\cosh(3x)}$

---

④ موضوع زنخ وبيجي عليه سؤال

دائما بس ركز وكل شي بكون سهل

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

شكل ١ — شكل ٢

Scanned by CamScanner

Example 33 Find ?

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$$

بدي أحولها للشكل اللي بعرفه ١

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$f(x) = \cos(x)$ ~~cos(x)~~

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(\pi + h) - f(x)}{h}$$

لازم يكون 1

$\cos(\pi) = -1$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(\pi + h) - \cos(\pi)}{h}$$

نفس الصيغة

$f(x) = \cos(x)$

$f'(x) = -\sin(x)\Big|_{x=\pi} = 0$

Scanned by CamScanner

Example 34 Find ?

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[4]{16+h} - 2}{h}$$

خطوات الحل ⇐

① نشبه بشكل $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

② المقدار تحت $\sqrt{\ }$ هو x و 16 هي

③ $f(x) = \sqrt[4]{x}$

الاشتقاق، $x = 16$ نعوض

$$f'(x) = \frac{1}{4} x^{\frac{3}{4}} \Big|_{x=16} = \boxed{2}$$

Example 35 Find ?

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^{10} - 1}{h}$$

حول لـ شكل ٢

$$f(x) = x^{10}$$

$$f'(x) \Big|_{x=1} = 10 x^{9} = \boxed{10}$$

Scanned by CamScanner

محمد السفاريني

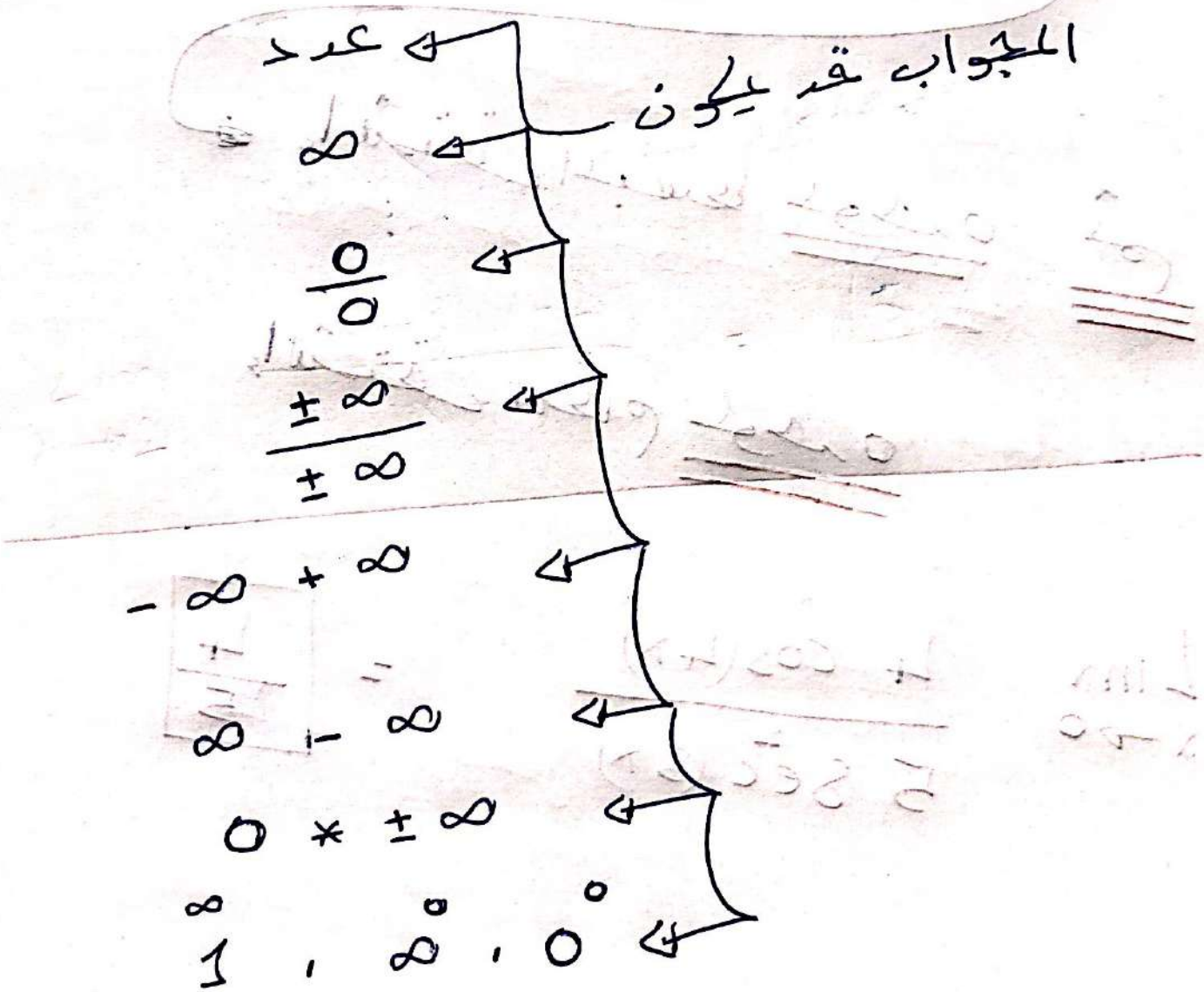
لجنة "سيغلي"

التحليل (1)

* قاعدة لوبيتال ⇐

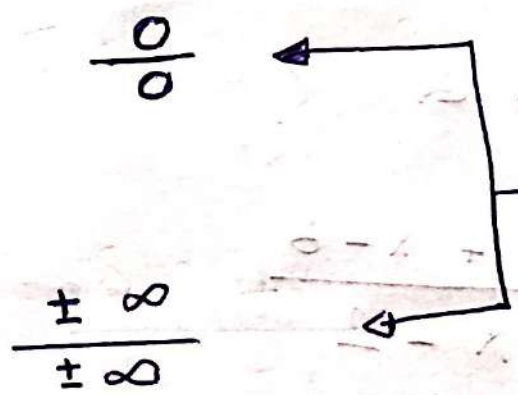
(*) دائما في سؤال النهايات أول خطوة عوض ذيل النهاية

المجواب قد يكون



Scanned by CamScanner

حالة ١



إذا طلع الجواب $\boxed{\frac{0}{0}}$

~~غير ذلك~~ يمكن حل السؤال

عن طريق لوبيتال أو

المتبسيط [الطرق السابقة]

إذا طلع الجواب $\boxed{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}$

لوبيتال

Scanned by CamScanner

Q1 Find ?

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$$

① عوض ذيل النهاية

$$\frac{(4) + 2 - 6}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

هل يمكنني التبسيط ؟؟

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)} = 5$$

Scanned by CamScanner

Q2 Find ?

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(4x)}{\tan(5x)} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

لا أستطيع التبسيط

فالشتق البسط لوحده ثم

فالشتق المقام لوحده

$$\lim_{x \to 0} \frac{4\cos(4x)}{5\sec^2(5x)} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

Scanned by CamScanner

Q3 Find ?

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + x^2}{1 - 2x^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

لوبيتال

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 + 2x}{-4x} = \frac{\infty}{\infty}$$

لوبيتال مرة ثانية

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$$

طريقة أخرى

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

المقامات في المقامات

Scanned by CamScanner

حالة ٢

$0 \cdot \pm\infty$

$\infty - \infty$ ← الجواب يكون

$-\infty + \infty$

(*) نخلي نشكل السؤال مع بقاء نفس المقدار.

Q5 Find ?

$$\lim_{x \to \infty} x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

$$\infty \sin(0) = \boxed{0 \cdot \infty}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

Scanned by CamScanner

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

حالة ① ← لوبيتال

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) * \left(\frac{-\pi}{x^2}\right)}{\frac{-1}{x^2}} = \boxed{\pi}$$

Q5 Find ?

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) =$$

$$\boxed{\infty - \infty}$$

* غير الشكل لحتى تصبح حالة ١

Scanned by CamScanner

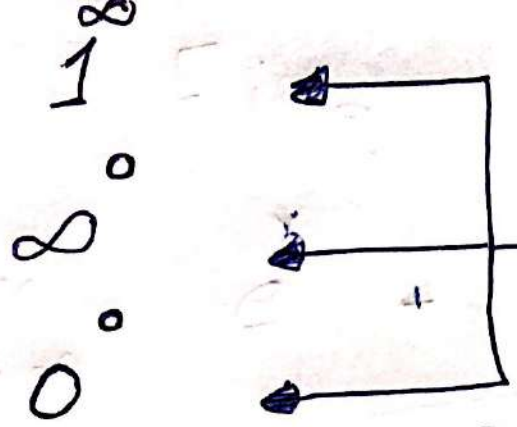
$$\lim_{x \to 1} \frac{x \ln(x) - (x-1)}{(x-1)\ln(x)} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x \cdot \frac{1}{x} + \ln(x) - 1}{\frac{(x-1)}{x} + \ln(x)} = \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Scanned by CamScanner

حالة ٣



الجواب يكون

نحل السؤال عن طريق إتباع

هذه الخطوات ⟸

① نضع ما داخل $\lim$ y

② نأخذ Ln للطرفين

③ نحل السؤال

④ جواب الحل نضع له e

للسيفلتي ♡

Scanned by CamScanner

Q6 Find ?

$$\lim_{x \to 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \boxed{\begin{matrix} \infty \\ 1 \end{matrix}}$$

$$\ln y = \ln(1 - 2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln(1 - 2x)$$

$$\lim_{x \to 0} \ln(y) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-2x)}{x} =$$

$$\frac{\frac{-2}{1-2x}}{1} = -2$$

$$\boxed{\begin{matrix} -2 \\ e \end{matrix}}$$

10

Scanned by CamScanner

Q7 Find ?

$$\lim_{x \to \infty} \left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \boxed{\infty^0}$$

$$\ln y = \ln\left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\ln(y)\right) = \frac{1}{x} \lim_{x \to \infty} \ln\left(e^x + x\right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\ln\left(e^x + x\right)}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x + 1}{e^x + x} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

11

$$\boxed{\frac{1}{e}}$$

Scanned by CamScanner